Schätzung von Wechselwirkungen bei nicht wiederholten Versuchen

20-21 Juni 2018

Karl Moder

Institut für Angewandte Statistik und EDV
Department für Raum, Landschaft und Infrastruktur
Universität für Bodenkultur, Wien

Zweifaktorielle Versuche mit Wechselwirkung

Das Modell einer zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Wechselwirkung sieht folgendermaßen aus:

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

x_{ijk} ... Beobachtung k bei Stufe α_i des Faktors A im Block β_j
$k = 1, \ldots, n$

μ ... Gesamtmittel

α_i ... Effekt der i-ten Stufe des Faktors A $\quad i = 1, \ldots, a$

β_j ... Effekt der j-ten Stufe des Faktors B $\quad j = 1, \ldots, b$

$(\alpha\beta)_{ij}$ ... Wechselwirkungseffekt bei der Stufe α_i des Faktors A und bei der Stufe β_j des Faktors B

e_{ijk} ... Fehlerterm bei der Wiederholung k der Stufe α_i des Faktors A und der Stufe β_j des Faktors B

Abweichungsquadratsummen in zweifaktoriellen Versuchen mit Wechselwirkung

Die Abweichungsquadratsumme für einen balancierten Versuch kann wie folgt berechnet werden:

$$SS_{AB} = n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2.$$

mit $(a-1)(b-1)$ Freiheitsgraden für die Wechselwirkung.

Abweichungsquadratsummen in zweifaktoriellen Versuchen mit Wechselwirkung

Die Abweichungsquadratsumme für einen balancierten Versuch kann wie folgt berechnet werden:

$$SS_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2.$$

mit $(a-1)(b-1)$ Freiheitsgraden für die Wechselwirkung.

The Abweichungsquadratsumme für den Fehler ergibt sich aus

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2.$$

mit $ab(n-1)$ Freiheitsgraden.

Abweichungsquadratsummen in zweifaktoriellen Versuchen mit Wechselwirkung

Die Abweichungsquadratsumme für einen balancierten Versuch kann wie folgt berechnet werden:

$$SS_{AB} = n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2.$$

mit $(a-1)(b-1)$ Freiheitsgraden für die Wechselwirkung.

The Abweichungsquadratsumme für den Fehler ergibt sich aus

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2.$$

mit $ab(n-1)$ Freiheitsgraden.

Ist die Anzahl der Wiederholungen $n = 1$ ist, dann gilt

- $\bar{x}_{ij.}$ ist für jede Kombination von Faktorstufen gleich x_{ij1}.

Abweichungsquadratsummen in zweifaktoriellen Versuchen mit Wechselwirkung

Die Abweichungsquadratsumme für einen balancierten Versuch kann wie folgt berechnet werden:

$$SS_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2.$$

mit $(a-1)(b-1)$ Freiheitsgraden für die Wechselwirkung.

The Abweichungsquadratsumme für den Fehler ergibt sich aus

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2.$$

mit $ab(n-1)$ Freiheitsgraden.

Ist die Anzahl der Wiederholungen $n = 1$ ist, dann gilt

- $\bar{x}_{ij.}$ ist für jede Kombination von Faktorstufen gleich x_{ij1}.
- die Freiheitsgrade für die Fehler - Abweichungsquadratsumme werden 0.

Abweichungsquadratsummen in zweifaktoriellen Versuchen mit Wechselwirkung

Die Abweichungsquadratsumme für einen balancierten Versuch kann wie folgt berechnet werden:

$$SS_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2.$$

mit $(a-1)(b-1)$ Freiheitsgraden für die Wechselwirkung.

The Abweichungsquadratsumme für den Fehler ergibt sich aus

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2.$$

mit $ab(n-1)$ Freiheitsgraden.

Ist die Anzahl der Wiederholungen $n = 1$ ist, dann gilt

- $\bar{x}_{ij.}$ ist für jede Kombination von Faktorstufen gleich x_{ij1}.
- die Freiheitsgrade für die Fehler - Abweichungsquadratsumme werden 0.
- $MS_E = \frac{SS_E}{df_E}$ die Fehlervarianz kann nicht bestimmt werden.

Abweichungsquadratsummen in zweifaktoriellen Versuchen mit Wechselwirkung

Die Abweichungsquadratsumme für einen balancierten Versuch kann wie folgt berechnet werden:

$$SS_{AB} = n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2.$$

mit $(a-1)(b-1)$ Freiheitsgraden für die Wechselwirkung.

The Abweichungsquadratsumme für den Fehler ergibt sich aus

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2.$$

mit $ab(n-1)$ Freiheitsgraden.

Ist die Anzahl der Wiederholungen $n = 1$ ist, dann gilt

- $\bar{x}_{ij.}$ ist für jede Kombination von Faktorstufen gleich x_{ij1}.
- die Freiheitsgrade für die Fehler - Abweichungsquadratsumme werden 0.
- $MS_E = \frac{SS_E}{df_E}$ die Fehlervarianz kann nicht bestimmt werden.

In der Folge dient das Durchschnittsquadrat der Wechselwirkung $(MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{df_{AB}})$ als Fehlerterm für den Test der Hauptwirkungen.

Modelle mit nicht-linearer Wechselwirkung

Tukey's [14] Block Modell mit Wechselwirkung:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda \times \alpha_i \times \beta_j + e_{ij}$$

λ ... Wechselwirkungsparameter

Block Modell von Johnson and Graybill [4]:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \Phi \times \xi_i \times \eta_j + e_{ij}$$

Annahmen:
$\sum_{i=1}^{a} \xi_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{b} \eta_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{a} \xi_i^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^{b} \eta_j^2 = 1$

Mandel's Block Modell [6]:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_i \times \beta_j + e_{ij}$$

γ_j ... der Wechselwirkungsparameter hängt von Zeile i ab.

Andere Varianten von Wechselwirkungstests

Milliken und Rasmuson's Test

Ein Test, der auf der Stichprobenvarianz für jede Reihe basiert, wurde von Milliken [9] vorgeschlagen. Die Zeilenvarianz wird berechnet als

$$s_i^2 = \frac{1}{c-1} \sum_{j=1}^{c} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$$

mit $E(s_i^2) = \sigma^2 + \frac{1}{c-1} \sum_{j=1}^{c} (\beta_j + \gamma_{ij})^2$. Wenn alle γ_{ij}s 0 sind, dann hat $E(s_i^2)$ den selben Wert für jede Zeile. Jeder Test auf die Gleichheit der Varianz ist daher geeignet um das Vorhandensein der Wechselwirkung zu testen.
Eine Diskussion und Modifikationen von Milliken's Test findet man bei Piepho [12]. In ähnlicher Weise verwendet die Methode von Kharrati and Sadooghi [5] Untertabellen von Zeilen.

Simecek

Einen alternativen Ansatz findet man bei Simecek [13]. Hier wird ein nicht - lineares Regressionsmodell an das Tukey Modell angepasst und das wird gegen ein Untermodell mit einem Likelihood Ratio Test geprüft.

Eine alternative Methode um Wechselwirkungen zu testen

In zweifaktoriellen Versuchen die auf dem Wechselwirkungsmodell aufbauen, werden üblicherweise folgende Restriktionen für die Wechselwirkung unterstellt:

$\alpha\beta_{11}$	$\alpha\beta_{21}$	$\alpha\beta_{31}$	$\alpha\beta_{41}$
$\alpha\beta_{42}$	$\alpha\beta_{12}$	$\alpha\beta_{22}$	$\alpha\beta_{32}$
$\alpha\beta_{33}$	$\alpha\beta_{43}$	$\alpha\beta_{13}$	$\alpha\beta_{23}$
$\alpha\beta_{24}$	$\alpha\beta_{34}$	$\alpha\beta_{44}$	$\alpha\beta_{14}$

Eine alternative Methode um Wechselwirkungen zu testen

In zweifaktoriellen Versuchen die auf dem Wechselwirkungsmodell aufbauen, werden üblicherweise folgende Restriktionen für die Wechselwirkung unterstellt:

$\alpha\beta_{11}$	$\alpha\beta_{21}$	$\alpha\beta_{31}$	$\alpha\beta_{41}$
$\alpha\beta_{42}$	$\alpha\beta_{12}$	$\alpha\beta_{22}$	$\alpha\beta_{32}$
$\alpha\beta_{33}$	$\alpha\beta_{43}$	$\alpha\beta_{13}$	$\alpha\beta_{23}$
$\alpha\beta_{24}$	$\alpha\beta_{34}$	$\alpha\beta_{44}$	$\alpha\beta_{14}$

$$\sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall j \quad j = 1, \ldots, b$$

Eine alternative Methode um Wechselwirkungen zu testen

In zweifaktoriellen Versuchen die auf dem Wechselwirkungsmodell aufbauen, werden üblicherweise folgende Restriktionen für die Wechselwirkung unterstellt:

$\alpha\beta_{11}$	$\alpha\beta_{21}$	$\alpha\beta_{31}$	$\alpha\beta_{41}$
$\alpha\beta_{42}$	$\alpha\beta_{12}$	$\alpha\beta_{22}$	$\alpha\beta_{32}$
$\alpha\beta_{33}$	$\alpha\beta_{43}$	$\alpha\beta_{13}$	$\alpha\beta_{23}$
$\alpha\beta_{24}$	$\alpha\beta_{34}$	$\alpha\beta_{44}$	$\alpha\beta_{14}$

$$\sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall j \quad j = 1,\ldots,b$$

$$\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall i \quad i = 1,\ldots,a$$

Eine alternative Methode um Wechselwirkungen zu testen

In zweifaktoriellen Versuchen die auf dem Wechselwirkungsmodell aufbauen, werden üblicherweise folgende Restriktionen für die Wechselwirkung unterstellt:

$\alpha\beta_{11}$	$\alpha\beta_{21}$	$\alpha\beta_{31}$	$\alpha\beta_{41}$
$\alpha\beta_{42}$	$\alpha\beta_{12}$	$\alpha\beta_{22}$	$\alpha\beta_{32}$
$\alpha\beta_{33}$	$\alpha\beta_{43}$	$\alpha\beta_{13}$	$\alpha\beta_{23}$
$\alpha\beta_{24}$	$\alpha\beta_{34}$	$\alpha\beta_{44}$	$\alpha\beta_{14}$
cb_1	cb_2	cb_3	cb_4

$$\sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall j \quad j = 1, \dots, b$$

$$\sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall i \quad i = 1, \dots, a$$

Eine alternative Methode um Wechselwirkungen zu testen

In zweifaktoriellen Versuchen die auf dem Wechselwirkungsmodell aufbauen, werden üblicherweise folgende Restriktionen für die Wechselwirkung unterstellt:

$\alpha\beta_{11}$	$\alpha\beta_{21}$	$\alpha\beta_{31}$	$\alpha\beta_{41}$
$\alpha\beta_{42}$	$\alpha\beta_{12}$	$\alpha\beta_{22}$	$\alpha\beta_{32}$
$\alpha\beta_{33}$	$\alpha\beta_{43}$	$\alpha\beta_{13}$	$\alpha\beta_{23}$
$\alpha\beta_{24}$	$\alpha\beta_{34}$	$\alpha\beta_{44}$	$\alpha\beta_{14}$
cb_1	cb_2	cb_3	cb_4

$$\sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall j \quad j = 1,\ldots,b$$

$$\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall i \quad i = 1,\ldots,a$$

$$\sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ik} = 0 \qquad \forall k \quad k = 1,\ldots,c$$

$c =$ Spaltenanzahl

Konsequenzen dieser Restiktionen für die Block Analyse

Durch Anwendung dieser zusätzlichen Restriktion auf das Blockmodell können wir die Wechselwirkung vom Fehlerterm trennen, indem wir den Mittelwert für jede Spalte k berechnen.

Konsequenzen dieser Restiktionen für die Block Analyse

Durch Anwendung dieser zusätzlichen Restriktion auf das Blockmodell können wir die Wechselwirkung vom Fehlerterm trennen, indem wir den Mittelwert für jede Spalte k berechnen.

Wegen der folgenden Modellannahmen

$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$, und
$\sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ik} = 0$ (innerhalb jeder Spalte k)

beinhaltet der Mittelwert jeder Spalte nur den Fehlerterm zusätzlich zu μ.

Konsequenzen dieser Restiktionen für die Block Analyse

Durch Anwendung dieser zusätzlichen Restriktion auf das Blockmodell können wir die Wechselwirkung vom Fehlerterm trennen, indem wir den Mittelwert für jede Spalte k berechnen.

Wegen der folgenden Modellannahmen

$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$, und
$\sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ik} = 0$ (innerhalb jeder Spalte k)

beinhaltet der Mittelwert jeder Spalte nur den Fehlerterm zusätzlich zu μ.

Es folgt, dass die Abweichungsquadratsumme für Spalten

$$SS_{col} = SS_E = a \sum_{k=1}^{c} (\bar{x}_{.k} - \bar{x}_{..})^2$$

ein Maß für den Fehlervarianz ist.

Berechnung der Abweichungs- und Durchschnittsquadrate

Abweichungsquadratsummen

$$SS_{AB} = SS_E^* - SS_E \qquad SS_E^* = \text{herkömmliche Fehlerschätzung}$$

oder alternativ

$$SS_{AB} = SS_T - SS_A - SS_B - SS_E$$

Freiheitsgrade

$$df_E = c - 1 = b - 1$$

$$df_{AB} = df_T - df_A - df_B - df_E + 2 = (a-2)(b-1)$$

Durchschnittsquadrate

$$MS_E = \frac{SS_E}{df_E} \qquad MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{df_{AB}}$$

Wechselwirkung in beliebigen Blockversuchen

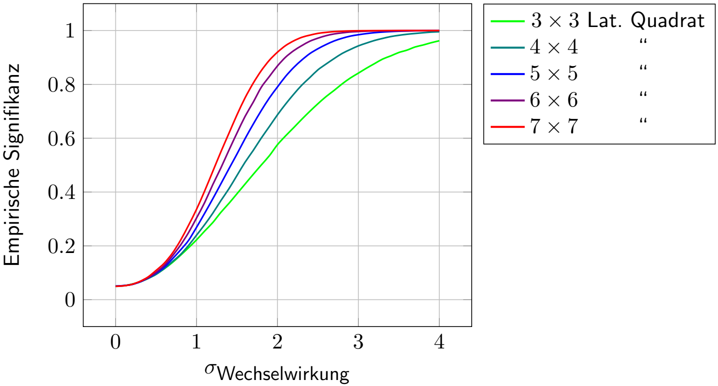
$\alpha\beta_{11}$	$\alpha\beta_{21}$	$\alpha\beta_{31}$	$\alpha\beta_{41}$	$\alpha\beta_{51}$
$\alpha\beta_{52}$	$\alpha\beta_{32}$	$\alpha\beta_{42}$	$\alpha\beta_{12}$	$\alpha\beta_{22}$

cb_1 cb_2

- Jeder der „Spaltenblöcke“ muss alle Stufen des Faktors enthalten.
- Die Anzahl der Blockeffekte ist in jedem „Spaltenblock“ unterschiedlich – daher ist die Summe dieser Effekte nicht 0.
- MS_E ist daher verzerrt und muss um diesen Effekt korrigiert werden. Die Blockmittelwerte sind unverzerrte Schätzwerte für jeden Blockeffekt. Anhand dieser können wir die Summen der Spaltenblöcke korrigieren.

Simulationsergebnisse (Lateinisches Quadrat)

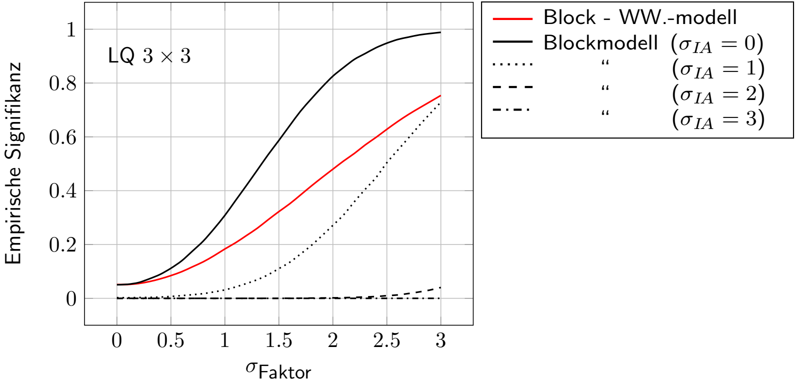
Test der Wechselwirkungseffekte



Empirische Signifikanz der Wechselwirkung in Abhängigkeit von der Standardabweichung der Wechselwirkung für verschiedene Lateinische Quadrate ($\sigma_E = 1$).

Simulationsergebnisse (Lateinisches Quadrat)

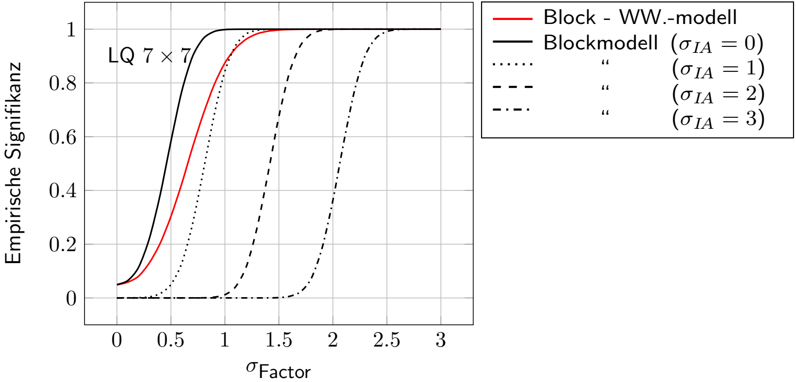
Test der Haupteffekte (Lateinisches Quadrat)



Empirische Signifikanz des Haupteffekts in Abhängigkeit von der Standardabweichung dieses Effekts für verschiedene Lateinische Quadrate bei verschiedener Standardabweichung der Wechselwirkung $(\sigma_E = 1)$.

Simulationsergebnisse (Lateinisches Quadrat)

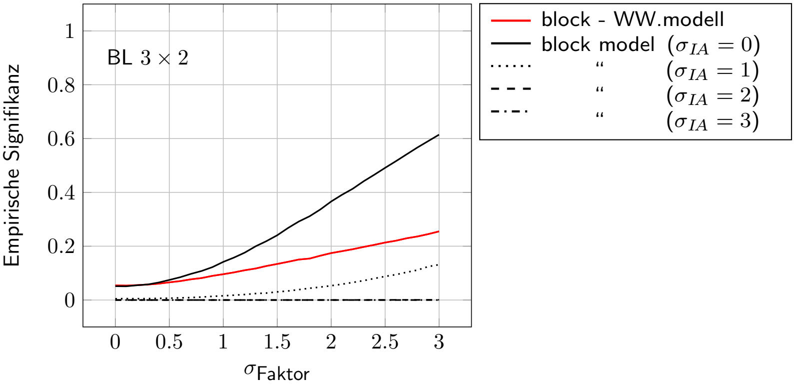
Test der Haupteffekte (Lateinisches Quadrat)



Empirische Signifikanz des Haupteffekts in Abhängigkeit von der Standardabweichung dieses Effekts für verschiedene Lateinische Quadrate bei verschiedener Standardabweichung der Wechselwirkung ($\sigma_E = 1$).

Simulationsergebnisse (RCB)

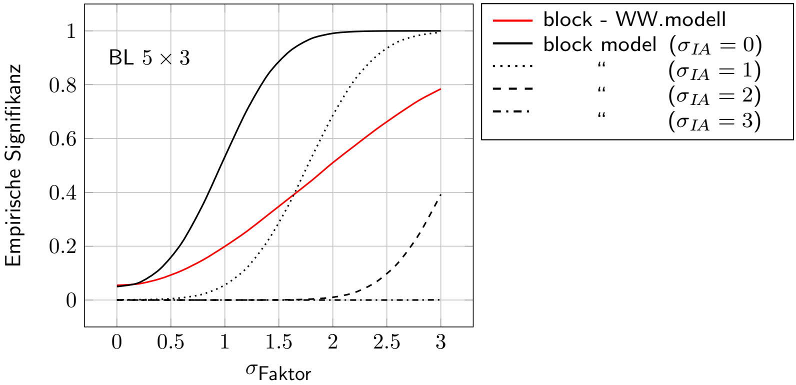
Test der Haupteffekte



Empirische Signifikanz des Haupteffekts in Abhängigkeit von der Standardabweichung dieses Effekts für verschiedene Block Designs bei verschiedener Standardabweichung der Wechselwirkung ($\sigma_E = 1$).

Simulationsergebnisse (RCB)

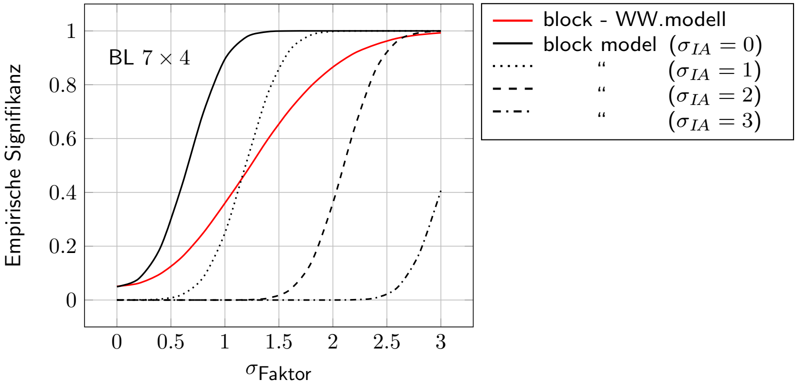
Test der Haupteffekte



Empirische Signifikanz des Haupteffekts in Abhängigkeit von der Standardabweichung dieses Effekts für verschiedene Block Designs bei verschiedener Standardabweichung der Wechselwirkung ($\sigma_E = 1$).

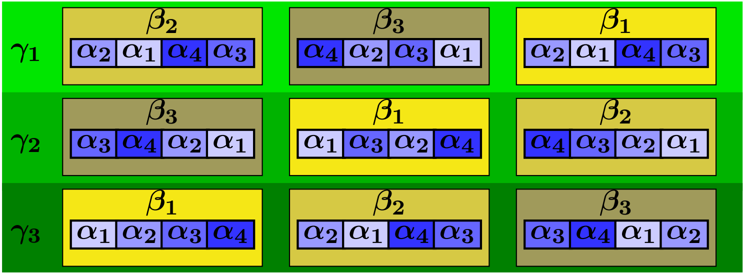
Simulationsergebnisse (RCB)

Test der Haupteffekte



Empirische Signifikanz des Haupteffekts in Abhängigkeit von der Standardabweichung dieses Effekts für verschiedene Block Designs bei verschiedener Standardabweichung der Wechselwirkung ($\sigma_E = 1$).

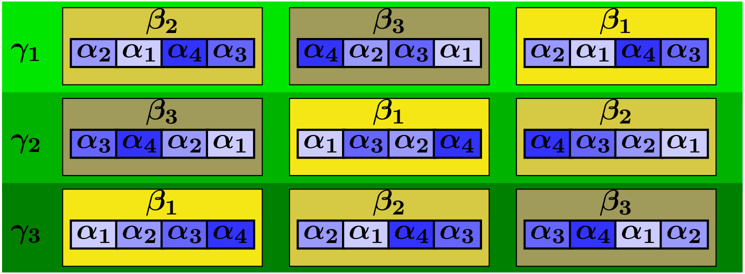
Split-Plot Anlage



Split-Plot Anlage

Split-Plot Modell*:

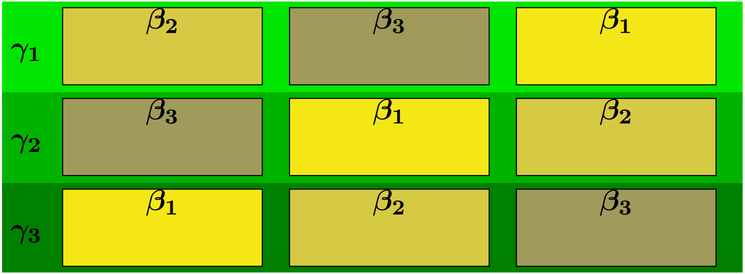
$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} + \beta_j + \gamma_k + e^*_{jk}$$



Split-Plot Anlage

Split-Plot Modell*:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} + \beta_j + \gamma_k + e^*_{jk}$$



Split-Plot Anlage

Split-Plot Modell*:

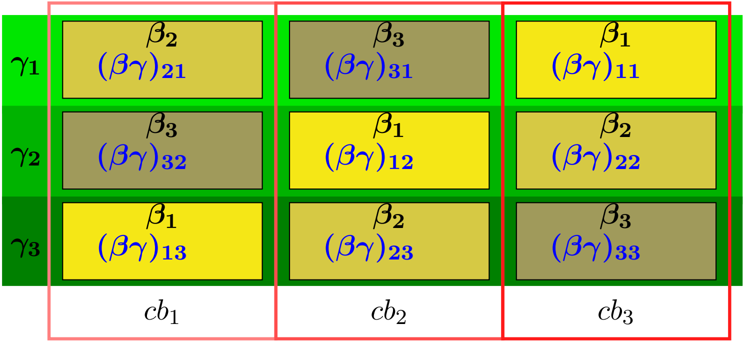
$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} + \beta_j + \gamma_k + e^*_{jk}$$

γ_1	β_2 $(\beta\gamma)_{21}$	β_3 $(\beta\gamma)_{31}$	β_1 $(\beta\gamma)_{11}$
γ_2	β_3 $(\beta\gamma)_{32}$	β_1 $(\beta\gamma)_{12}$	β_2 $(\beta\gamma)_{22}$
γ_3	β_1 $(\beta\gamma)_{13}$	β_2 $(\beta\gamma)_{23}$	β_3 $(\beta\gamma)_{33}$
	cb_1	cb_2	cb_3

Split-Plot Anlage

Split-Plot Modell*:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} + \beta_j + \gamma_k + e^*_{jk}$$



Split-Plot WW-Modell:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} + \beta_j + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + e_{jk}$$

Balanzierte Unvollständige Blockanlage (BIBD)

$b = 10, k = 3, v = 6, r = 5, \lambda = 2$

α_1	α_6	α_3
α_2	α_1	α_5
α_3	α_4	α_2
α_4	α_2	α_6
α_5	α_3	α_4
α_4	α_5	α_1
α_2	α_6	α_5
α_1	α_2	α_3
α_6	α_1	α_4
α_3	α_5	α_6

Balanzierte Unvollständige Blockanlage (BIBD)

$b = 10, k = 3, v = 6, r = 5, \lambda = 2$

α_1	α_6	α_3
α_2	α_1	α_5
α_3	α_4	α_2
α_4	α_2	α_6
α_5	α_3	α_4
α_4	α_5	α_1
α_2	α_6	α_5
α_1	α_2	α_3
α_6	α_1	α_4
α_3	α_5	α_6

$\sum_i^k \alpha_i \neq 0$

Balanzierte Unvollständige Blockanlage (BIBD)

$b = 10, k = 3, v = 6, r = 5, \lambda = 2$

$\alpha\beta_{11}$	$\alpha\beta_{61}$	$\alpha\beta_{31}$
$\alpha\beta_{22}$	$\alpha\beta_{12}$	$\alpha\beta_{52}$
$\alpha\beta_{33}$	$\alpha\beta_{43}$	$\alpha\beta_{23}$
$\alpha\beta_{44}$	$\alpha\beta_{24}$	$\alpha\beta_{64}$
$\alpha\beta_{55}$	$\alpha\beta_{35}$	$\alpha\beta_{45}$
$\alpha\beta_{46}$	$\alpha\beta_{56}$	$\alpha\beta_{16}$
$\alpha\beta_{27}$	$\alpha\beta_{67}$	$\alpha\beta_{57}$
$\alpha\beta_{18}$	$\alpha\beta_{28}$	$\alpha\beta_{38}$
$\alpha\beta_{69}$	$\alpha\beta_{19}$	$\alpha\beta_{49}$
$\alpha\beta_{30}$	$\alpha\beta_{50}$	$\alpha\beta_{60}$

$\sum_i^k \alpha_i \neq 0$

$\sum_i^k (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \qquad \forall j \quad j = 1, \ldots, b$

Balanzierte Unvollständige Blockanlage (BIBD)

$b = 10, k = 3, v = 6, r = 5, \lambda = 2$

$\boxed{\alpha\beta_{11}}$	$\alpha\beta_{61}$	$\alpha\beta_{31}$
$\alpha\beta_{22}$	$\boxed{\alpha\beta_{12}}$	$\alpha\beta_{52}$
$\alpha\beta_{33}$	$\alpha\beta_{43}$	$\alpha\beta_{23}$
$\alpha\beta_{44}$	$\alpha\beta_{24}$	$\alpha\beta_{64}$
$\alpha\beta_{55}$	$\alpha\beta_{35}$	$\alpha\beta_{45}$
$\alpha\beta_{46}$	$\alpha\beta_{56}$	$\boxed{\alpha\beta_{16}}$
$\alpha\beta_{27}$	$\alpha\beta_{67}$	$\alpha\beta_{57}$
$\boxed{\alpha\beta_{18}}$	$\alpha\beta_{28}$	$\alpha\beta_{38}$
$\alpha\beta_{69}$	$\boxed{\alpha\beta_{19}}$	$\alpha\beta_{49}$
$\alpha\beta_{30}$	$\alpha\beta_{50}$	$\alpha\beta_{60}$

$\sum_i^k \alpha_i \neq 0$

$\sum_i^k (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \qquad \forall j \quad j = 1, \ldots, b$

$\sum_j^r (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall i \quad i = 1, \ldots, v$

Balanzierte Unvollständige Blockanlage (BIBD)

$b = 10, k = 3, v = 6, r = 5, \lambda = 2$

$\alpha\beta_{11}$	$\alpha\beta_{61}$	$\alpha\beta_{31}$
$\alpha\beta_{22}$	$\alpha\beta_{12}$	$\alpha\beta_{52}$
$\alpha\beta_{33}$	$\alpha\beta_{43}$	$\alpha\beta_{23}$
$\alpha\beta_{44}$	$\alpha\beta_{24}$	$\alpha\beta_{64}$
$\alpha\beta_{55}$	$\alpha\beta_{35}$	$\alpha\beta_{45}$
$\alpha\beta_{46}$	$\alpha\beta_{56}$	$\alpha\beta_{16}$
$\alpha\beta_{27}$	$\alpha\beta_{67}$	$\alpha\beta_{57}$
$\alpha\beta_{18}$	$\alpha\beta_{28}$	$\alpha\beta_{38}$
$\alpha\beta_{69}$	$\alpha\beta_{19}$	$\alpha\beta_{49}$
$\alpha\beta_{30}$	$\alpha\beta_{50}$	$\alpha\beta_{60}$

$$\sum_i^k \alpha_i \neq 0$$

$$\sum_i^k (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \qquad \forall j \quad j = 1, \ldots, b$$

$$\sum_j^r (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall i \quad i = 1, \ldots, v$$

Balanzierte Unvollständige Blockanlage (BIBD)

$b = 10, k = 3, v = 6, r = 5, \lambda = 2$

$\alpha\beta_{11}$	$\alpha\beta_{61}$	$\alpha\beta_{31}$
$\alpha\beta_{22}$	$\alpha\beta_{12}$	$\alpha\beta_{52}$
$\alpha\beta_{33}$	$\alpha\beta_{43}$	$\alpha\beta_{23}$
$\alpha\beta_{44}$	$\alpha\beta_{24}$	$\alpha\beta_{64}$
$\alpha\beta_{55}$	$\alpha\beta_{35}$	$\alpha\beta_{45}$
$\alpha\beta_{46}$	$\alpha\beta_{56}$	$\alpha\beta_{16}$
$\alpha\beta_{27}$	$\alpha\beta_{67}$	$\alpha\beta_{57}$
$\alpha\beta_{18}$	$\alpha\beta_{28}$	$\alpha\beta_{38}$
$\alpha\beta_{69}$	$\alpha\beta_{19}$	$\alpha\beta_{49}$
$\alpha\beta_{30}$	$\alpha\beta_{50}$	$\alpha\beta_{60}$

$$\sum_i^k \alpha_i \neq 0$$

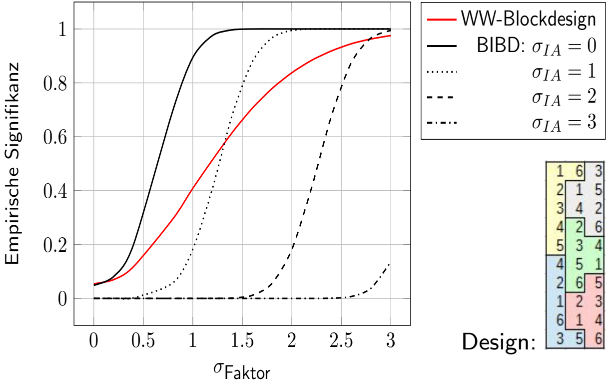
$$\sum_i^k (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \qquad \forall j \quad j = 1, \ldots, b$$

$$\sum_j^r (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \forall i \quad i = 1, \ldots, v$$

$$\sum_i^v (\alpha\beta)_{il} = 0 \qquad \forall l \quad l = 1, \ldots, c$$

Simulationsergebnisse für BIBD

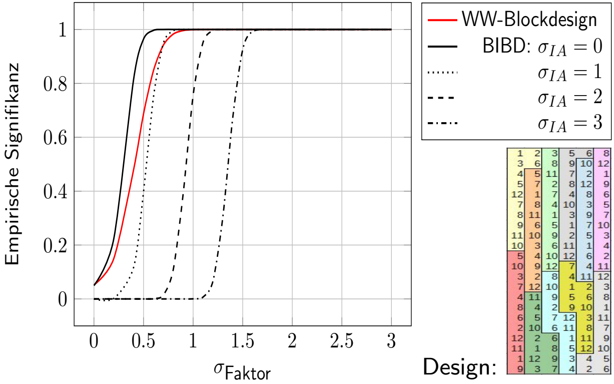
Test der Haupteffekte ($b = 10, k = 3, v = 6, r = 5, \lambda = 2$)



Empirische Signifikanz des Haupteffekts in Abhängigkeit von der Standardabweichung dieses Effekts für verschiedene unvollständige Blockanlagen bei verschiedener Standardabweichung der Wechselwirkung ($\sigma_E = 1$).

Simulationsergebnisse für BIBD

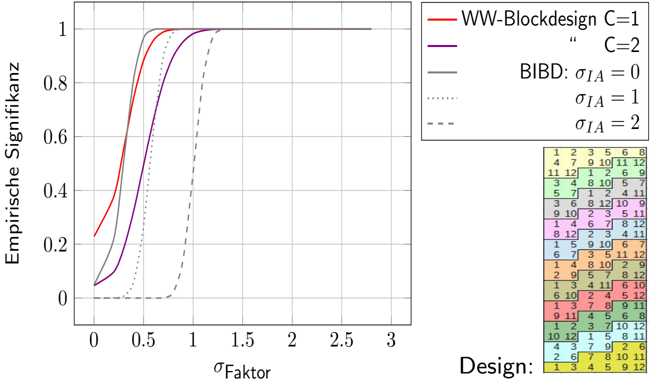
Test der Haupteffekte ($b = 22, k = 6, v = 12, r = 11, \lambda = 5$) Struktur 1



Empirische Signifikanz des Haupteffekts in Abhängigkeit von der Standardabweichung dieses Effekts für verschiedene unvollständige Blockanlagen bei verschiedener Standardabweichung der Wechselwirkung ($\sigma_E = 1$).

Simulationsergebnisse für BIBD

Test der Haupteffekte ($b = 22, k = 6, v = 12, r = 11, \lambda = 5$) Struktur 2

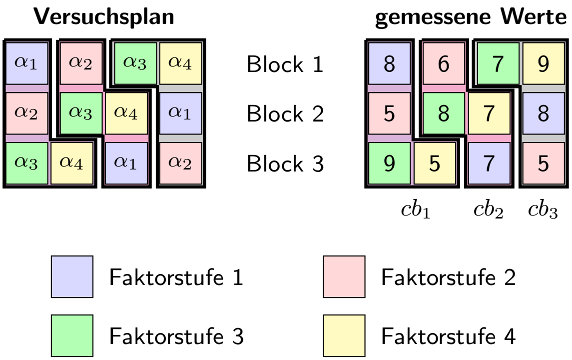


Design:

1	2	3	5	6	8
4	7	9	10	11	12
11	12	1	2	6	9
3	4	8	10	5	7
5	7	1	2	4	11
3	6	8	12	10	9
9	10	2	3	5	11
1	4	6	7	8	12
8	12	2	3	4	11
1	5	9	10	6	7
6	7	3	5	11	12
1	4	8	10	2	9
2	9	5	7	8	12
1	3	4	11	6	10
6	10	2	4	5	12
1	3	7	8	9	11
9	11	4	5	6	8
1	2	3	7	10	12
10	12	1	5	8	11
4	3	7	9	2	6
2	6	7	8	10	11
1	3	4	5	9	12

Empirische Signifikanz des Haupteffekts in Abhängigkeit von der Standardabweichung dieses Effekts für verschiedene unvollständige Blockanlagen bei verschiedener Standardabweichung der Wechselwirkung ($\sigma_E = 1$).

Ein erläuterndes Beispiel



Mittelwerte

gesamt $\bar{\bar{x}}$	Faktor $\bar{x}_f$ 1	2	3	4	Block $\bar{x}_b$ 1	2	3
7.0	$7.\overline{6}$	$5.\overline{3}$	8.0	7.0	7.5	7.0	6.50

Berechnung der Spaltenblockmittelwerte $\bar{x}_{cb_k}$

Die unkorrigierte Spaltenblocksummen enthalten bestimmte Blockeffekt verschieden oft (z.B. enthält die Summe des erste Spaltenblocks cb_1 2 $\times$ Blockeffekt 3, die Summe von cb_2 enthält 2 $\times$ Blockeffekt 2, die Summe von cb_3 enthält 2 $\times$ Blockeffekt 1).

Berechnung der Blockeffekte

$$
\begin{aligned}
ef_{b_1} &= \bar{x}_{b_1} - \bar{\bar{x}} = 7.5 - 7.0 = 0.5 \\
ef_{b_2} &= \bar{x}_{b_2} - \bar{\bar{x}} = 7.0 - 7.0 = 0.0 \\
ef_{b_3} &= \bar{x}_{b_3} - \bar{\bar{x}} = 6.5 - 7.0 = -0.5
\end{aligned}
$$

	Spaltenblock		
	1	2	3
unkorr. Summe	27	28	29
korr. Summe	27-(-0.5)=27.5	28-0=28.0	29-0.5=28.5
Mittelwerte	6.875	7.00	7.125

Abweichungsquadratsummen, Freiheitsgrade

Abweichungsquadratsummen herkömmliche Blockanalage:

$$SS_T{=}24.0 \qquad SS_F{=}12.\overline{6} \qquad SS_{E^*}{=}9.\overline{3}$$

Abweichungsquadratsummen, Freiheitsgrade

Abweichungsquadratsummen herkömmliche Blockanalage:

$$SS_T = 24.0 \qquad SS_F = 12.\overline{6} \qquad SS_{E^*} = 9.\overline{3}$$

Abweichungsquadratsummen Spaltenblock-Anlage:

$$\begin{aligned} SS_E &= n_f \sum_{k=1}^{n_{cb}} (\bar{x}_{cb_k} - \bar{\bar{x}})^2 \\ &= 4((6.875 - 7.0)^2 + (7.000 - 7.0)^2 + (7.125 - 7.0)^2) \\ &= \mathbf{0.125} \\ SS_{WW} &= SS_{E^*} - SS_E \\ &= 9.\overline{3} - 0.125 = \mathbf{9.208\overline{3}} \end{aligned}$$

Abweichungsquadratsummen, Freiheitsgrade

Abweichungsquadratsummen herkömmliche Blockanalage:

$$SS_T{=}24.0 \qquad SS_F{=}12.\overline{6} \qquad SS_{E^*}{=}9.\overline{3}$$

Abweichungsquadratsummen Spaltenblock-Anlage:

$$\begin{aligned} SS_E &= n_f \sum_{k=1}^{n_{cb}} (\bar{x}_{cb_k} - \bar{\bar{x}})^2 \\ &= 4((6.875-7.0)^2 + (7.000-7.0)^2 + (7.125-7.0)^2) \\ &= \mathbf{0.125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS_{WW} &= SS_{E^*} - SS_E \\ &= 9.\overline{3} - 0.125 = \mathbf{9.208\overline{3}} \end{aligned}$$

Freiheitsgrade Spaltenblock-Anlage:

$$df_E = n_{cb} - 1 = n_b - 1 = 3 - 1 = \mathbf{2} \qquad (1)$$

$$df_{WW} = (n_b - 1)(n_f - 2) = (3-1)(4-2) = \mathbf{4} \qquad (2)$$

Varianzanalyse

herkömmliche Blockanlage

Effekt	df	SS	MS	F	Prob
Faktor	3	$12.\overline{6}$	$4.\overline{2}$	2.71	0.1377
Block	2	2.0	1.0	0.64	0.5585
Fehler	6	$9.\overline{3}$	$1.\overline{5}$		
Total	11	24.0			

Varianzanalyse

herkömmliche Blockanlage

Effekt	df	SS	MS	F	Prob
Faktor	3	$12.\overline{6}$	$4.\overline{2}$	2.71	0.1377
Block	2	2.0	1.0	0.64	0.5585
Fehler	6	$9.\overline{3}$	$1.\overline{5}$		
Total	11	24.0			

Blockanalyse mit Wechselwirkung

Effect	df	SS	MS	F	Prob
Faktor	3	$12.66\overline{6}$	$4.222\overline{2}$	$67.5\overline{5}$	0.0146
Block	2	2.000	1.0000	16.00	0.0588
Wechselwirkung	4	9.208	2.3021	$36.8\overline{3}$	0.0266
Error	2	0.125	0.0625		
Total	11	24.000			

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Es ist möglich Wechselwirkungen im linearen Blockmodell zu testen.

Zusammenfassung

- Es ist möglich Wechselwirkungen im linearen Blockmodell zu testen.
- Es müssen keine ungewöhnlichen Annahmen im Hinblick auf diese Wechselwirkung getroffen werden. Die Restriktionen beziehen sich auf die Anordnung der Plots und die Summe der Wechselwirkungen innerhalb eines „Spaltenblocks“.

Zusammenfassung

- Es ist möglich Wechselwirkungen im linearen Blockmodell zu testen.
- Es müssen keine ungewöhnlichen Annahmen im Hinblick auf diese Wechselwirkung getroffen werden. Die Restriktionen beziehen sich auf die Anordnung der Plots und die Summe der Wechselwirkungen innerhalb eines „Spaltenblocks“.
- Die Methode kann auf viele Arten von Blockanlagen angewendet werden.

Zusammenfassung

- Es ist möglich Wechselwirkungen im linearen Blockmodell zu testen.
- Es müssen keine ungewöhnlichen Annahmen im Hinblick auf diese Wechselwirkung getroffen werden. Die Restriktionen beziehen sich auf die Anordnung der Plots und die Summe der Wechselwirkungen innerhalb eines „Spaltenblocks“.
- Die Methode kann auf viele Arten von Blockanlagen angewendet werden.
- Die Güte der Methode ist gut.

Zusammenfassung

- Es ist möglich Wechselwirkungen im linearen Blockmodell zu testen.
- Es müssen keine ungewöhnlichen Annahmen im Hinblick auf diese Wechselwirkung getroffen werden. Die Restriktionen beziehen sich auf die Anordnung der Plots und die Summe der Wechselwirkungen innerhalb eines „Spaltenblocks“.
- Die Methode kann auf viele Arten von Blockanlagen angewendet werden.
- Die Güte der Methode ist gut.
- Die Methode ist einfach anzuwenden und es können alle gängigen Statistikpakete verwendet werden.

Literature I

Amina Barhdadi and Sorana Froda.
An exact test for additivity in two-way tables under biadditive modelling.
Communications in Statistics - Theory and Methods, 39(11):1960–1978, 2010.

L. C. A. Corsten and A. C. Van Eijnbergen.
Multiplicative effects in two-way analysis of variance.
Statistica Neerlandica, 26(3):61–68, 1972.

H. F. Gollob.
A statistical model which combines features of factor analysis and analysis of variance.
Psychometrica, 33:73–115, 1968.

Dallas E. Johnson and Franklin A. Graybill.
An analysis of a two-way model with interaction and no replication.
Journal of the American Statistical Association, 67:862–869, 1972.

M. Kharrati-Kopaei and S. M. Sadooghi-Alvandi.
A new method for testing interaction in unreplicated two-way analysis of variance.
Communications in Statistics - Theory and Methods, 36(15):2787–2803, 2007.

Literature II

J. Mandel.
Non-additivity in two-way analysis of variance.
Journal of the American Statistical Association, 56:878–888, 1961.

J. Mandel.
The partitioning of interaction in analysis of variance.
J. Res. Nat. Bur. Stand. B Mathemat. Sci., 3:309–328, 1969.

J. Mandel.
A new analysis of variance model for non-additive data.
Technometrics, 13:1–18, 1971.

George A. Milliken and Dale Rasmuson.
A heuristic technique for testing for the presence of interaction in nonreplicated factorial experiments.
Australian Journal of Statistics, 19(1):32—-38, 1977.

Ike B. Onukogu.
One degree of freedom for interaction in a two-way classification without replications.
Biometrical Journal, 25(1):21–27, 1983.

Ike B. Onukogu.
Two models for interaction in a 3-way analysis of variance with one observation per cell.
Biometrical Journal, 31(6):649–662, 1989.

Literature III

Hans-Peter Piepho.
On tests for interaction in a nonreplicated two-way layout.
Australian Journal of Statistics, 36(3):363–369, 1994.

D Rasch, T Rusch, M Simeckova, K D Kubinger, K Moder, and P Simecek.
Tests of additivity in mixed and fixed effect two-way anova models with single sub-class numbers.
Statistical Papers, 50(4):905–916, 2009.

J. W. Tukey.
One degree of freedom for non-additivity.
Biometrics, 5:232–242, 1949.