Geologische Anwendung der Bayes-Schätzung einer Poisson-Regression mit zufälligen Effekten

R. **Vonthein**,
Institut für Medizinische Biometrie und Statistik
Universität zu Lübeck
vonthein@imbs.uni-luebeck.de,
J. Reinecker,
Institut für Geowissenschaften, Universität Tübingen

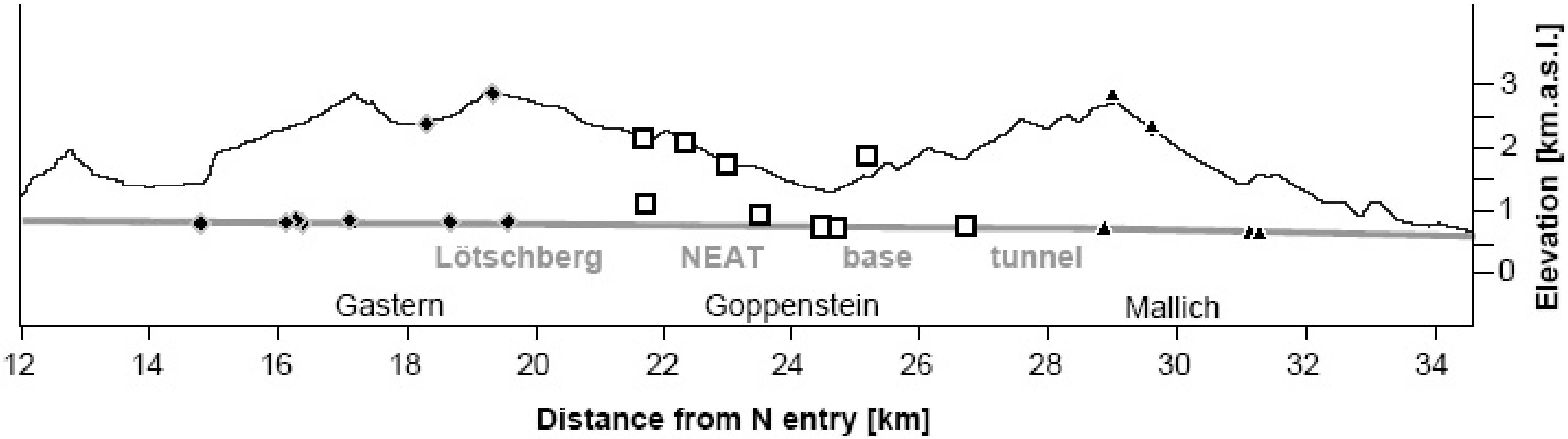
Aufgabe

Lösung

Qualität

Exhumationsrate

Das Gebirge hebt sich und wird abgetragen.
Die Freilegung wird für jeden Berg in km/Ma gemessen durch Proben (◆, □, ▲) in verschiedenen Höhen (**Elevation**, km), deren „zentrales“ thermochronologisches Alter geschätzt wird.



Thermochronologie

Spaltspuren (*Fission Tracks*) von Uran in Apatit

[image removed]

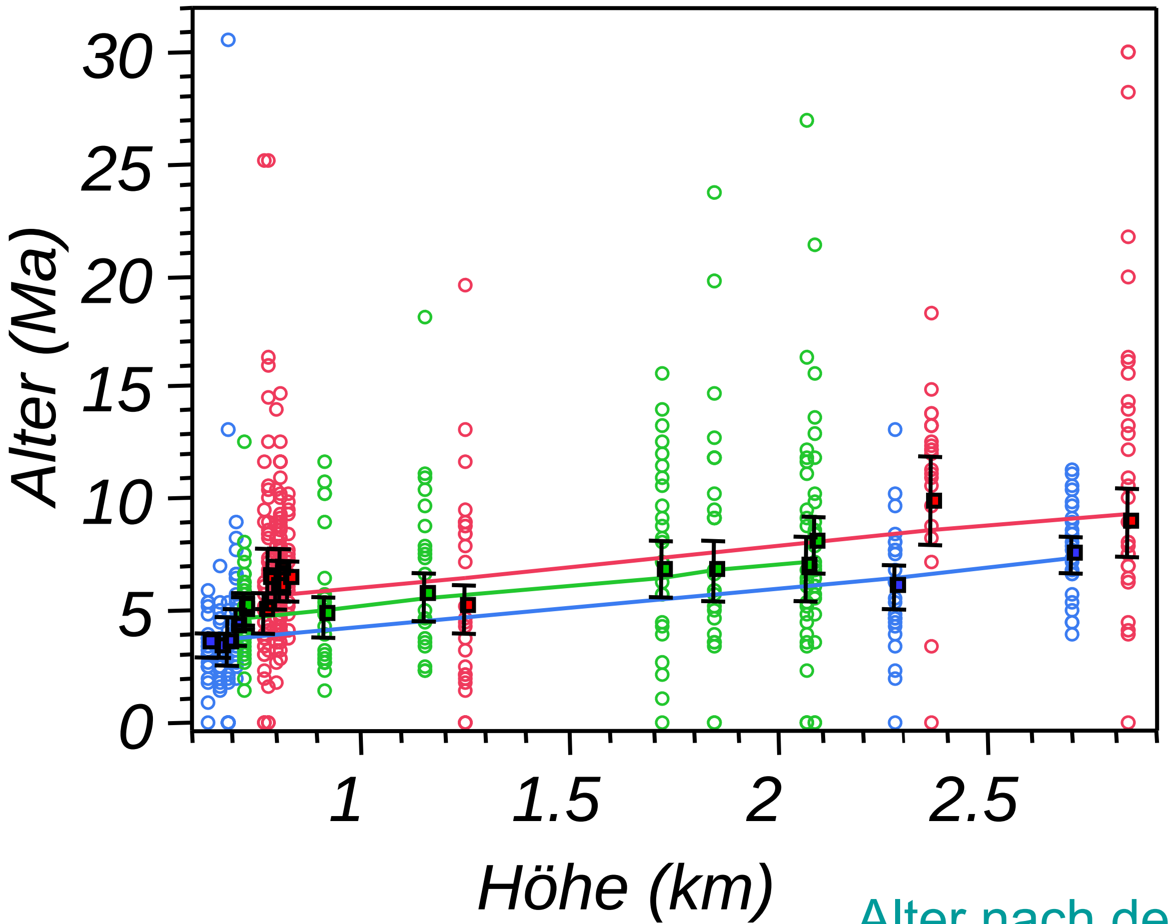
*

Anzahlen Ns_{ijk} und Ni_{ijk} spontaner und (auf Glimmer) induzierter Spaltspuren in Kristall i der Probe j von Stelle k zeigen das Alter seit der letzten Abkühlung an.#

* *Pitman SD Radiometric Dating Methods © July 2001 Updating October 2008 [http://www.detectingdesign.com/radiometricdating.html#Fission 14.01.2009]*
\# Galbraith, R.F. 2005. *Statistics for Fission Track Analysis.* Chapman&Hall, Boca Raton

Proben

[image removed]



Lötschberg

Alter nach der Höhe für 588 Kristalle (o) aus 24 Proben von 3 Bergen (Farben) eines Massivs. Schwarz: *central ages* mit $\pm$ 1s [Galbraith and Laslett, 1993]

Zahl spontaner Spaltspuren $Ns_i \sim \mathrm{Po}(\rho s_i)$ ist Poisson-verteilt

wie auch $i = 1, 2, 3, \ldots, 588$

Zahl induzierter Spaltspuren $Ni_i \sim \mathrm{Po}(\rho i_i)$

$\rho s_i = \rho i_i \cdot q_i$ modelliere das Verhältnis der Erwartungswerte

$\rho i_i \sim \mathrm{Exp}(\mu)$

$q_i \sim \mathrm{LN}(\eta_j, \sigma^2)$ Vertauschbarkeit der Kristalle einer Probe

In der Kalibrierungsformel

Bergeffekt+lineare Abhängigkeit von Höhe h

dazu zufällige Effekte der Proben innerhalb der Berge

$$\eta_j = \ln\left(\frac{\beta_{0,k} + \beta_1 h_j}{19.2236 \cdot rd_j}\right) + b_{2,j}$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, 24, \quad k = 1, 2, 3$$

Verteilungen a priori

$b_{2,j} \sim \mathrm{N}(0, \tau^2)$ Achsenabschnitt-Effekte

$\mu \sim \mathrm{Exp}(200)$ Zahl induzierter Spaltspuren

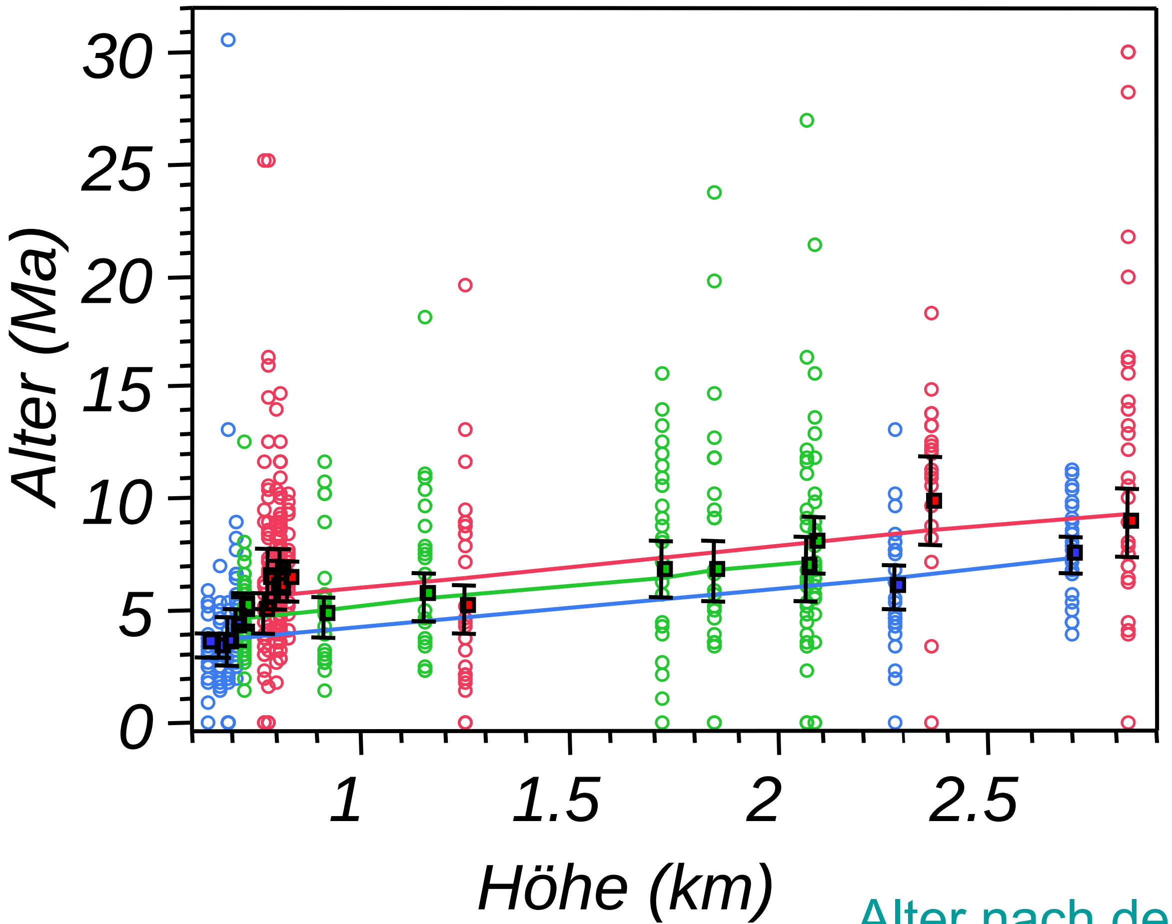
Präzision des Kristall-Alters $1/\sigma^2 \sim \Gamma(0.1, 0.1)$ „innerhalb einer Größenordnung"

Präzision des Proben-Alters $1/\tau^2 \sim \Gamma(0.1, 0.1)$ „innerhalb einer Größenordnung"

Achsenabschnitte* sind $\beta_{0,j} \sim \mathrm{LN}(1,1)$ ca. 3 („eine Größenordnung")

Kehrwert d. Exhumationsrate* $\beta_1 \sim \mathrm{LN}(\ln(1.25),1)$ 1/0.8 („eine Größenordnung")

* 3 und 0.8 aus **Michalski, Soom [1990]**.



Lötschberg

Alter nach der Höhe für 588 Kristalle (o) aus 24 Proben von 3 Bergen (Farben) eines Massivs. Schwarz: *central ages* mit $\pm$ 1s [Galbraith and Laslett, 1993]

Ergebnisse

Erwartungswert der Zahl induzierter Spaltspuren

$$E(\mu \mid \mathbf{D}) = 1/159$$

Variatonskoeffizient (erste Näherung)

$$E(\sigma \mid \mathbf{D}) = 0.132, E(\tau \mid \mathbf{D}) = 0.169$$

Achsenabschnitte

$$E(\beta_{0,1} \mid \mathbf{D}) = 2.37, E(\beta_{0,2} \mid \mathbf{D}) = 3.38, E(\beta_{0,3} \mid \mathbf{D}) = 4.23$$

1 / Exhumationsrate

$$E(\beta_1 \mid \mathbf{D}) = 1.822$$

Exhumationsrate, 95%-Wahrscheinlichkeits-Interval

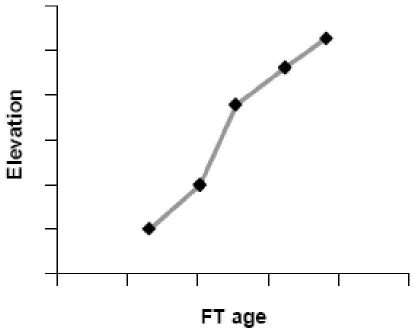
$$F_{1/\beta_1}^{-1}(0.5 \mid \mathbf{D}) = 0.552, F_{1/\beta_1}^{-1}(0.025 \mid \mathbf{D}) = 0.393, F_{1/\beta_1}^{-1}(0.975 \mid \mathbf{D}) = 0.836$$

gegeben die Daten und alle anderen Parameter

$$\mathbf{D} = (\mathbf{Ns}, \mathbf{Ni})$$

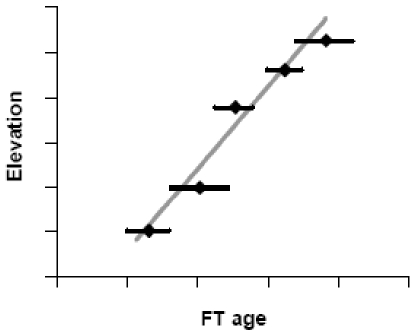
Parameterschätzung und Güte der Anpassung (DIC) für veschiedene Modelle.

Model	homoscedastic fixed effects	homoscedastic random effects	heteroscedastic fixed effects	heteroscedastic random effects
Parameter				
$1/\beta_1$	0.57 (0.48 to 0.69)	0.54 (0.33 to 0.95)	0.55 (0.45 to 0.71)	0.56 (0.37 to 0.96)
β_1	1.8	1.9	1.8	1.8
β_0	2.3, 3.5, 4.6	2.2, 3.3, 4.4	2.2, 3.4, 4.6	2.2, 3.3, 4.4
σ	0.14	0.14	0.19 to 0.70	0.19 to 0.60
τ		0.18		0.17
μ		1/159		1/159
DIC	7396	7391	7445	7449

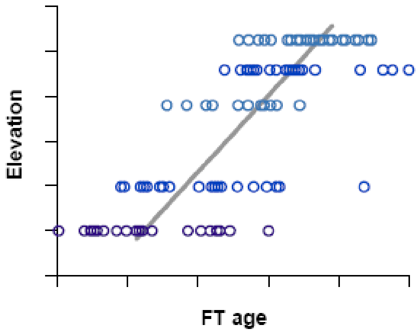


FT central ages

Riesengebirge

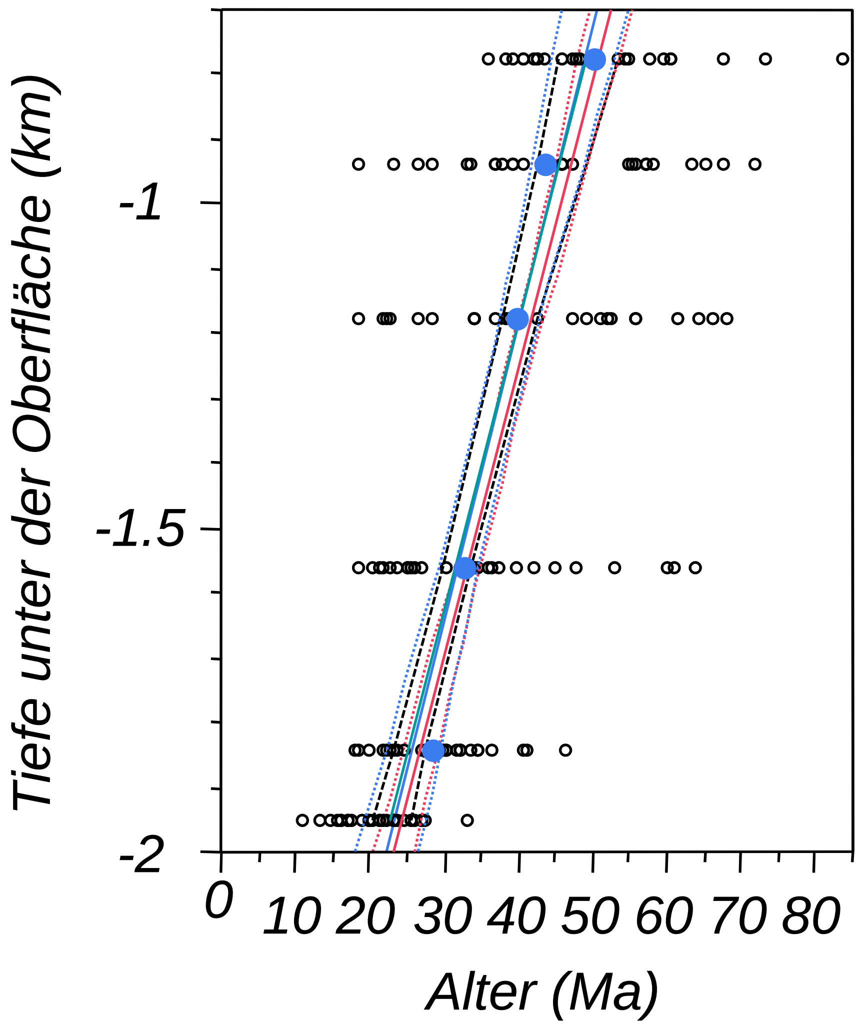


FT central ages
and standard deviation



FT grain ages

Genauigkeitsvergleich



Alter nach der Tiefe unter der Oberfläche für 178 Kristalle (o) aus 6 Proben von einem Berg im Riesen-gebirge mit Regressions-geraden (durchgezogen) und 95%-Konfidenzgrenzen (gestrichelt) für Punkte auf den Geraden, die an die sechs zentralen Probenalter (blaue Punkte) angepasst wurden (blau), an alle Kristalle (rot) und aus dem Poisson-Lognormal-Modell (schwarz).

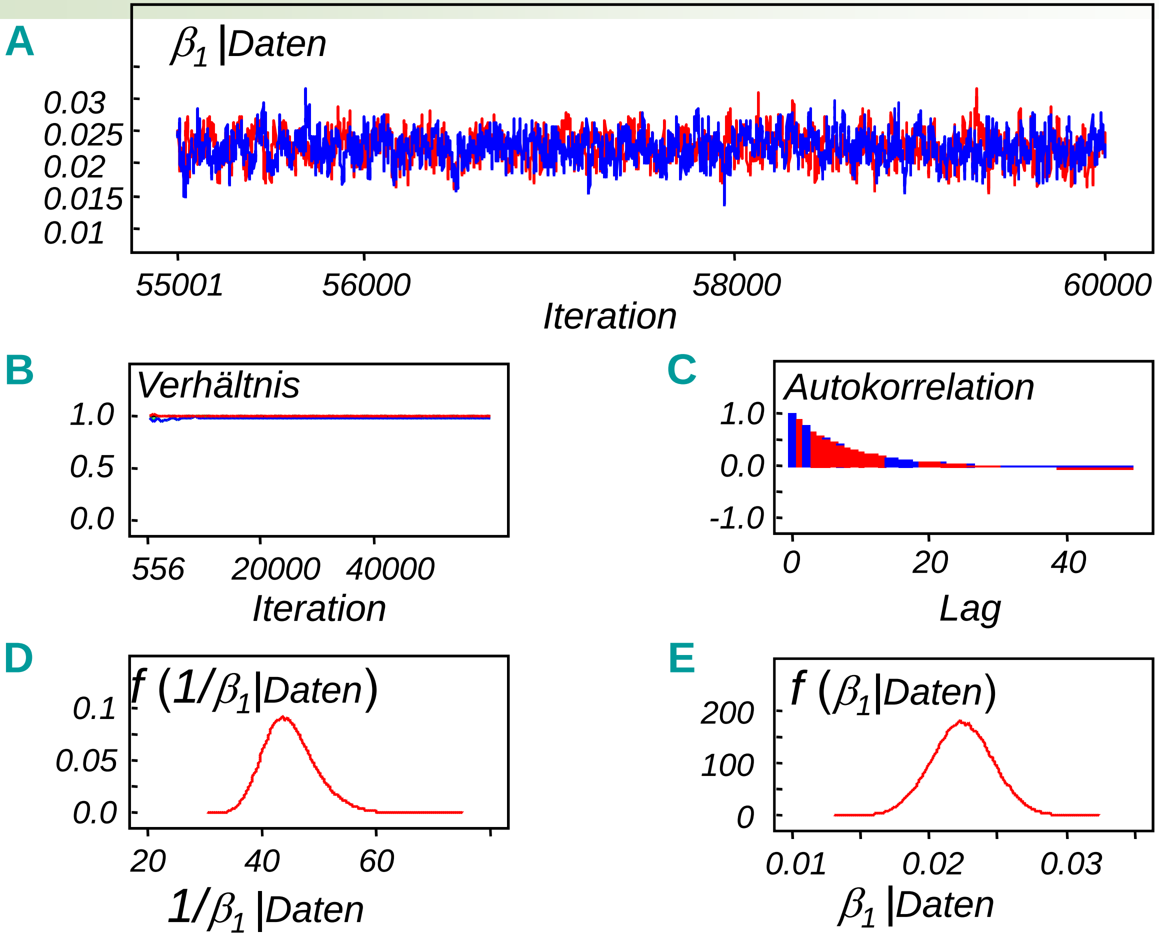


Abb.5: Konvergenz und Ergebnisse der Monte Carlo Markov Ketten bei der Schätzung der Steigung β_1 und der Exhumationsrate $1/\beta_1$ für variszische Granite aus dem Riesengebirge (Danišík, unveröffentlichte Daten). **A**: die letzten 10 000 Interationen aus zwei Ketten zeigen *rapid mixing*. **B**: Das Gelman-Rubin Kriterium wurde nach 10 000 Interationen *burn in* eingehalten. **C**: Die Autokorrelation generierter $1/\beta_0$ fällt ab. **D**: Die a-posteriori-Dichte von $1/\beta_0$ ist rechts-schief und glatt nach 100 000 Zügen nach *burn in*. **E**: Die a-posteriori-Dichte von β_0 ist fast symmetrisch; Einheit: m/Ma.

Methodenübersicht

Autoren	**Gallagher Holmes 2005**	**diese Arbeit**	**Galbraith Goutis 1996**
Daten	Spaltspuren-Zahl,-Länge	Spaltspuren-Zahl	Spaltspuren-Zahl
Ansatz	Bayesianisch	Bayesianisch	klassisch
Modell	Regression,Strukturbruch	ANCOVA	Erwartungswerte
bivariate Poisson Verteilung	$Ns \sim$ binomial gegeben Ni	lognormale zufällige Effekte Aichison Ho 1989	Mischung bivariater Poisson-Verteilungen

[image removed]

Vielen Dank

für die Diskussion!

WinBUGS

```
model { # Poisson-Lognormal model
 for(i in 1:588) { # grains
   Ns[i] ~ dpois(lambda[i,1]); Ni[i] ~ dpois(lambda[i,2]);
   lambda[i,1] <- lambda[i,2]*q[i];
   lambda[i,2] ~ dexp(0.005);
   q[i] ~dlnorm(eta[i],isigma2);
   eta[i] <- log((b0[ort[i]] + b1*height[i])/(19.2236*rd[i]));
 }
 isigma2 ~ dgamma(0.1,0.1); sigmaw <- 1/sqrt(isigma2);
 # three sites
 b0[1] ~dlnorm(1,1); b0[2] ~dlnorm(1,1); b0[3] ~dlnorm(1,1);
 b1 ~ dlnorm(0.223,1); ib1 <- 1/b1;
 for(j in 1:24) { # samples
   age[j] <- (b0[site[j]] + b1*h[j]);
 }
}
```