

Eine nicht-parametrische Glättungsmethode, die Randinformationen berücksichtigt

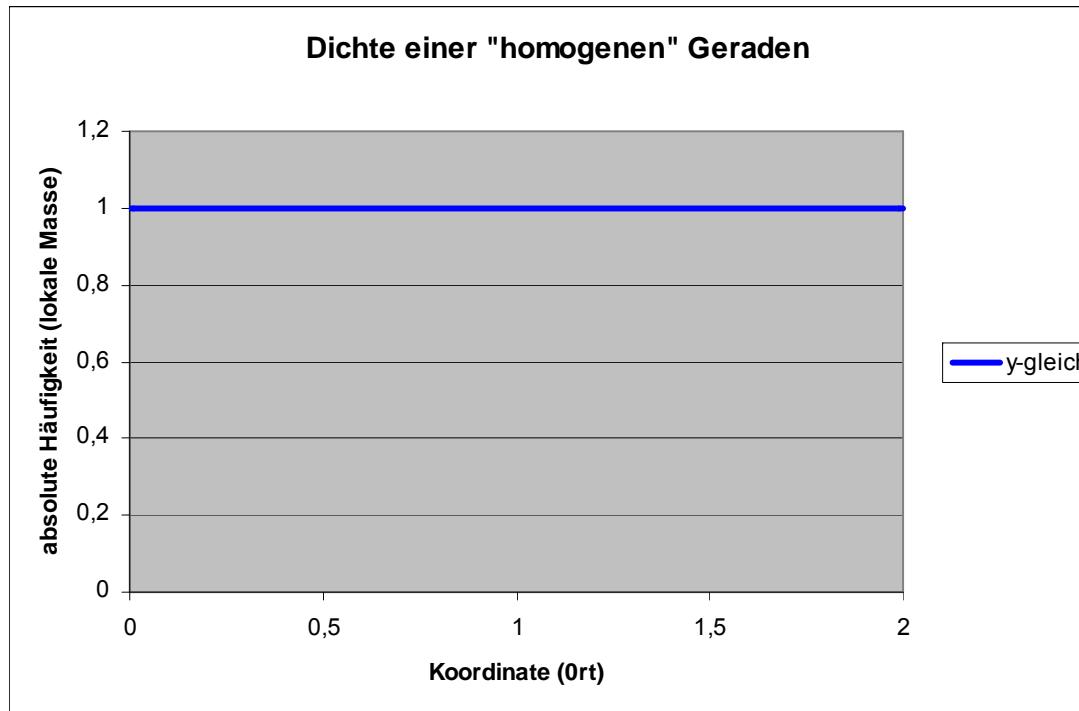
Andreas Fröhlich, Thomas Selhorst, Christoph Staubach
FLI-Wusterhausen

AG – Räumliche Statistik
Lübeck, Dezember 2009

Gliederung

- Dichteschätzungen
 - Probleme am Rand
 - ein minimaler Anspruch
 - ein Lösungsvorschlag
- Theoretische Betrachtungen
 - mit allgemeinen praktischen Bezügen
- Beispiele
 - Dichteberechnungen aus der Praxis und ihre individuellen Interpretationen
- offene Probleme

Dichte einer homogenen Graden



Eigenschaften des Objekts: 1. Homogenität,
2. Objekt erfüllt vollständig den Raum

Berechnung der Dichte eines homogenen Objektes O

- Bezeichne
 - $V(x)$ eine lokale Umgebung um den Punkt x des Objektes O und
 - $m(V(x))$ die von der Umgebung $V(x)$ eingeschlossene Masse sowie
 - $i(V(x))$ den Inhalt der Umgebung $V(x)$
- so sei per definitionem
 - die Dichte d des Objekts O in x
 - $d(x) = m(V(x)) / i(V(x))$
- Anmerkung:
 - Die „Größe“ und „Form“ der lokalen Umgebung $V(x)$ ist für die Dichtebestimmung in x ohne Bedeutung!

Invarianz der Dichte homogener Objekte

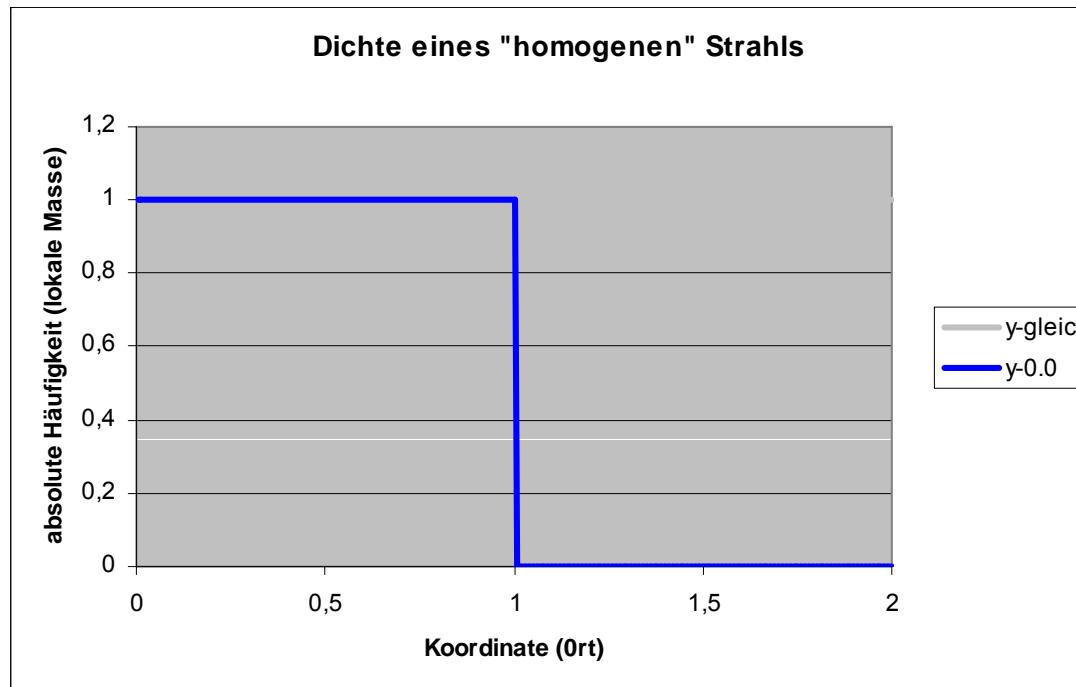
- Die Dichte ist invariant bzgl. $V(x)$
 - d.h. $d(x)$ ist stets gleich groß unabhängig von der gewählten
 - Größe von $V(x)$,
 - Form von $V(x)$ und
 - Positionierung von $V(x)$
- **Minimaler Anspruch an Dichtebestimmungen:**
 - ! **homogene Objekte O besitzen konstante Dichte, $d(x)=\text{const.}$ für alle x aus O !**

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Dichte eines homogenen Strahls

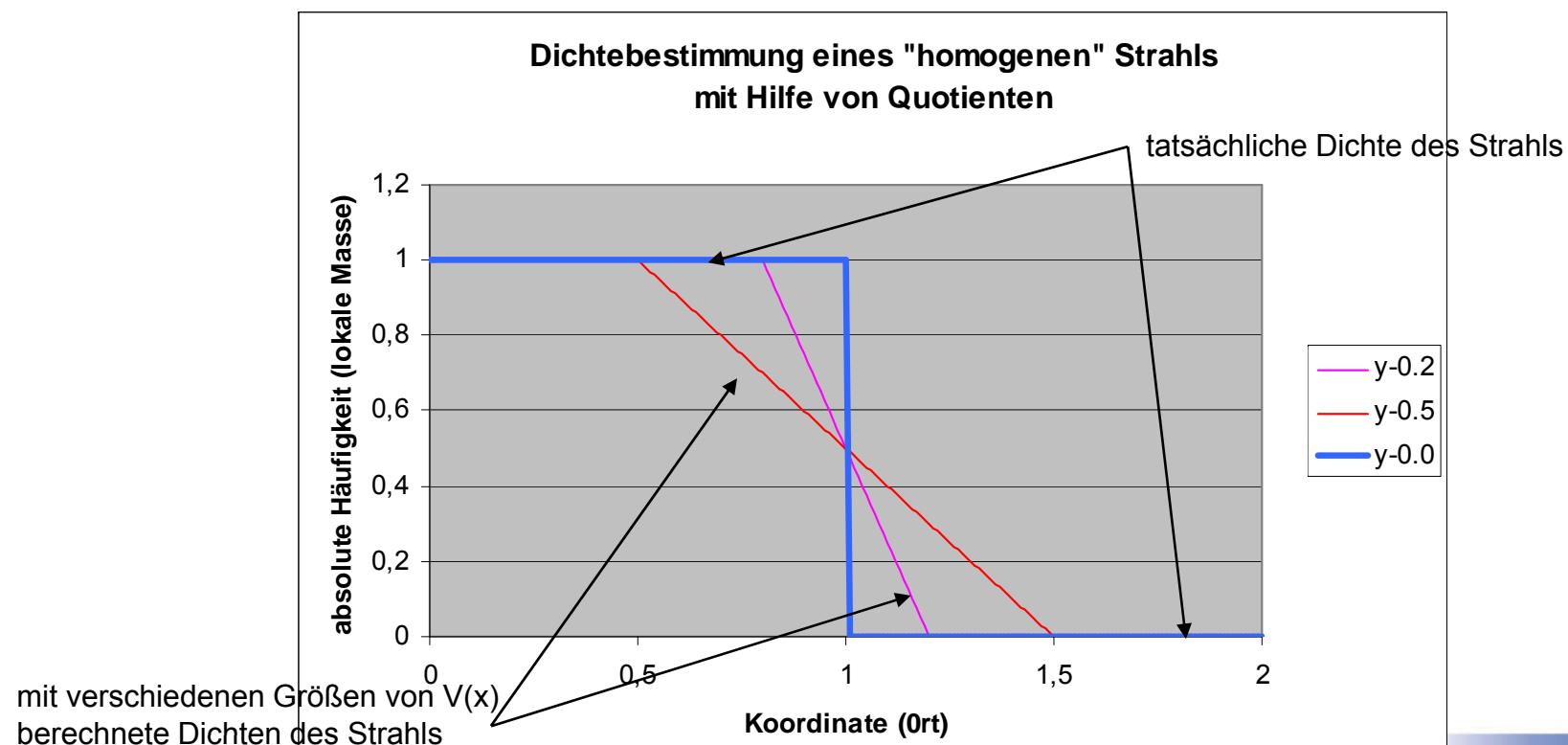


Eigenschaften des Objekts:

1. Homogenität des Objekts,
2. Objekt ist echte Teilmenge des Raumes

Berechnung der Dichte eines homogenen Strahls

- unter Verwendung von $V(x)$ von „konstanter“ Form und Positionierung bzgl. x und verschiedenen Größen



Berechnung der Dichte eines homogenen Strahls

- Besonderheit (an Stellen „nahe“ $x=1$) am Rand von O
 - $V(x)$ ist als Teilmenge von O zu wählen (insbesondere für den homogenen Fall) und/oder
 - Umgebung $V(x)$ von x muss vom Inhalt i (=Größe - Inhalt) hinreichend „klein“ gewählt werden

somit ist

$$d(x) = \lim_{i(V(x)) \rightarrow 0} \frac{m(V(x))}{i(V(x))}$$

eine verallgemeinerte Definition
der Dichte des Objekts O in x ; x innerer Punkt von O

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Notwendige Bedingung einer korrekten Dichteberechnung im (topologischen) Inneren

- Wird statt des korrekten Limes

$$\lim_{i(V(x)) \rightarrow 0} \frac{m(V(x))}{i(V(x))}$$

ein Quotient zur näherungsweisen Dichteberechnungen verwendet,
dann sind Randinformationen von Objekten O mit zu berücksichtigen

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Numerisches Problem

- Endlichkeit der Messwerte zum Objekt O lässt für beliebige $x \in O$ im Allgemeinen keinen praktikablen Limesübergang zu
- * d.h. **V(x)** muss eine nicht leere Menge von Messwerten (Beobachtungen) des Objekts O enthalten, so dass $m(V(x))$ kontrollierbar bestimmbar bleibt

Gewünschte Eigenschaften von $V(x)$

- Da $d(x)$ eine lokale Größe ist, sollte $V(x)$ eine „gut an x gebundene“ Umgebung darstellen
 - Für nicht-homogene Objekte O sollte $V(x)$ möglichst klein gewählt werden.
der Grenzübergang ist wegen Bedingung *
(numerisch) praktisch unmöglich
- > Notwendigkeit der Wahl eines geeigneten „Glättungsparameters“, der $V(x)$ beschreibt**

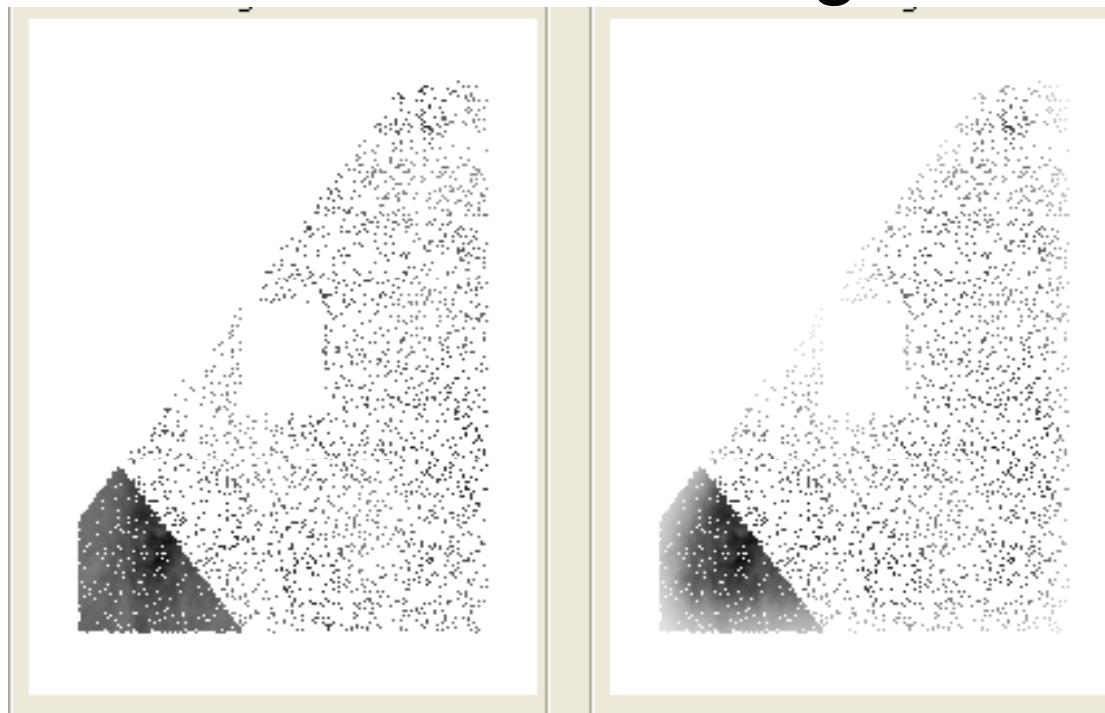
FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Elementare Forderung einer Dichteschätzung

- Reproduzierbarkeit homogener Dichten



modifiziert Methode

Standard

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Methode ohne zusätzliche Annahmen

- k-nächster Nachbarn (in metrischen Räumen R)
(k – entspricht einem notwendigen Glättungsparameter)

$O \ni x \mapsto O_k(x) = V_k(x) \cap O$, wobei

$V_k(x) = \{y \in R \mid d(y, x) \leq r_{k,x} \wedge r_{k,x} = \min\{r \mid \text{card}(\{m \in M \cap V(x)) \geq k\})\}\}$, wobei

M die Menge der Messwerte bezeichne .

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Die Dichteschätzung

- Jedem beliebigen Element $x \in R$ wird wie folgt ein Dichtewert $d_k(x, O)$ in Abhängigkeit des Glättungsparameters k zugeordnet:

$$R \ni x \mapsto \frac{k}{\int_{V_k(x)} I_O dy}$$

- Die Inhaltsbestimmung i von $V_k(x) \cap O$ ($= \int_{V_k(x) \cap O} dy$) mit I_O als Indikatorfunktion von O erfolgt stochastisch durch eine gleichverteilte ZFG auf dem Objekt O

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Wichtige Begründungen und unbeantwortete Fragen

- Für euklidische Räume
 - Warum Umgebungen $V(x)$ von x als n-dimensionale Kugeln
 - Bewegungsinvarianz des Inhaltes - somit Unabhängigkeit von der Lage des Koordinatensystem
- Wie sehen Verallgemeinerungen auf allgemeine metrisierbare Räume aus?

(Theorem über die Metrisierbarkeit top. Räume,
P.S. Uryson (1925))

Ein top. Raum mit abzählbarer Basis ist genau dann metrisierbar, wenn er normal ist.

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

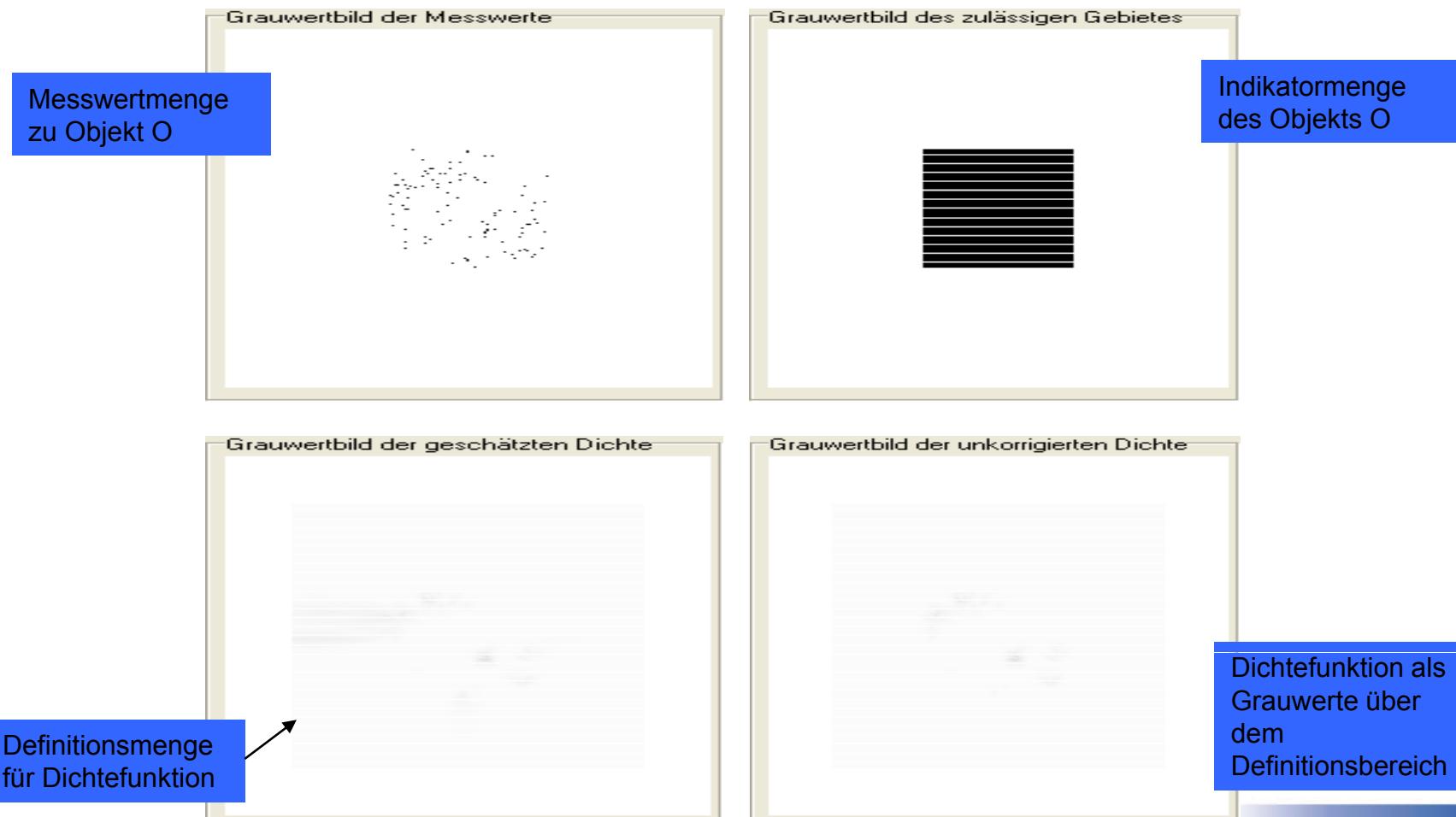
Was zur Berechnung benötigt wird

- Rel. Datenbanksystem zur Speicherung von
 - Messwertmenge,
 - Indikatorfunktion (-menge) des Objekts O,
 - Definitionsmenge für Dichtefunktion
 - Resultate der Dichtefunktion
- Programm für die Berechnung (Client)

Vor- und Nachteile der gegenwärtigen Realisierung dieser Methode

- Nachteile:
 - SQL-Datenbank
 - SQL-Datenbankmanagementkenntnisse
 - lange Rechenzeiten
- Vorteile:
 - Möglichkeit der Berechnung von Zerlegungen von Gebieten (symmetrische Differenzen)
 - Parallelle Berechnungen
 - Einsicht in alle relevanten Zwischenergebnisse
 - Übernahme der Ergebnisse in GIS-Systeme

Alle benötigten und verfügbaren Daten auf einen Blick



Interpretation1: Identifikation von Randregionen mit erhöhtem Risiko



modifizierte Methode der Schätzung vs. Standardmethode

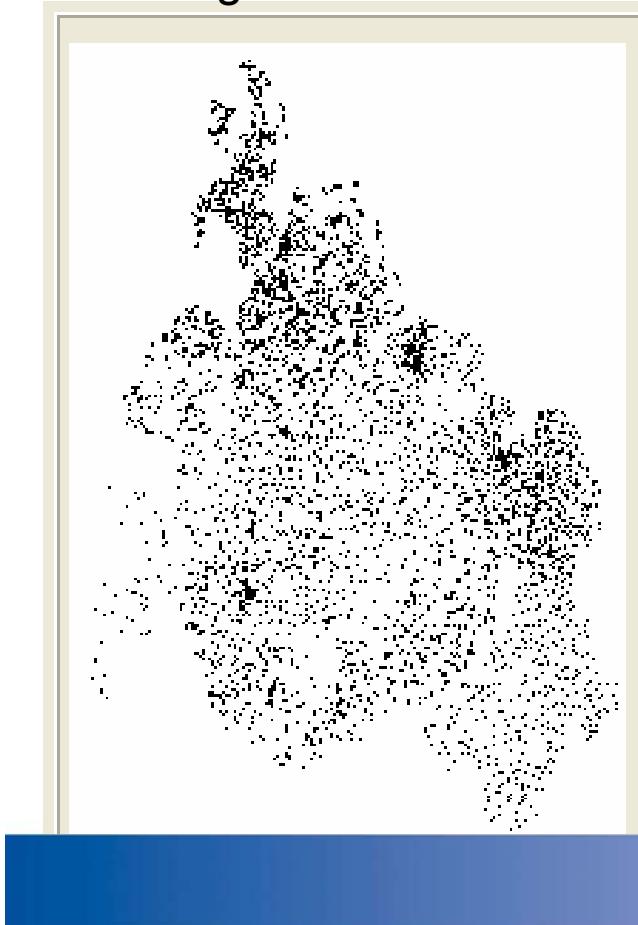
FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Interpretation 2: Dichte von Haltungen bzgl. Landfläche

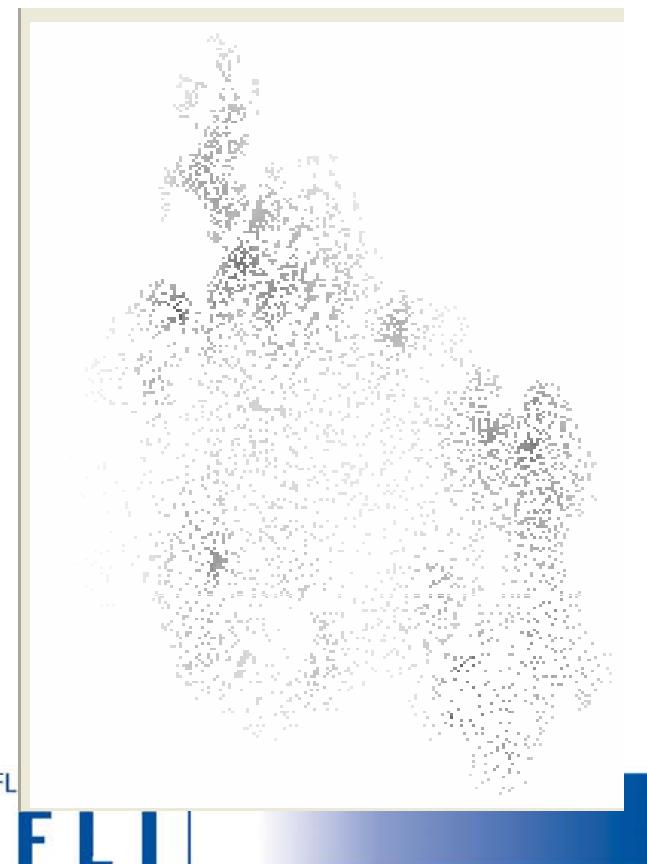
Positionen der Haltungen



Dichte der Haltungen mit Randinformation



Dichte der Haltungen Standard

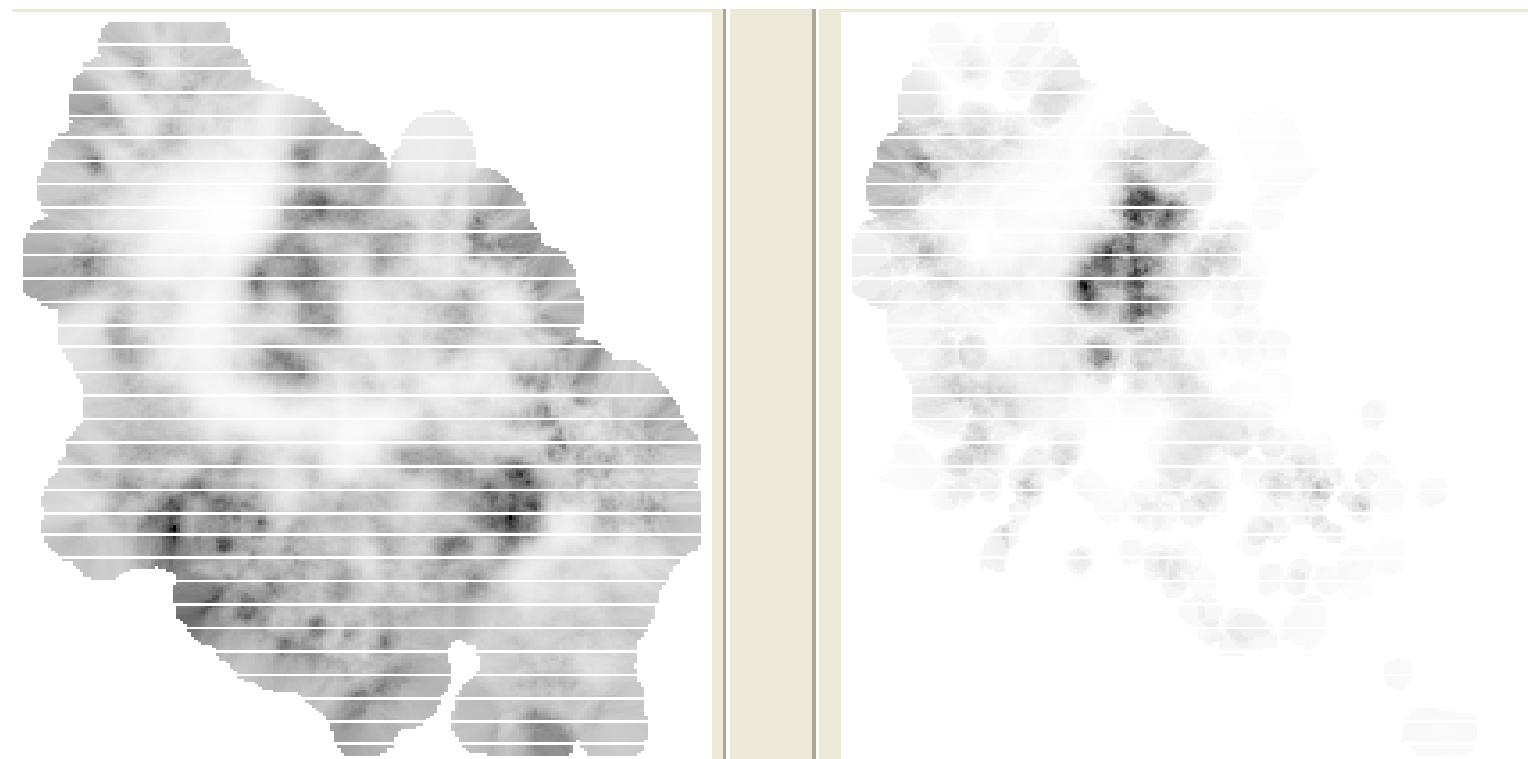


FFL

FLI

Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Interpretation 3: Wohin ist eine weitere Ausbreitung wahrscheinlich



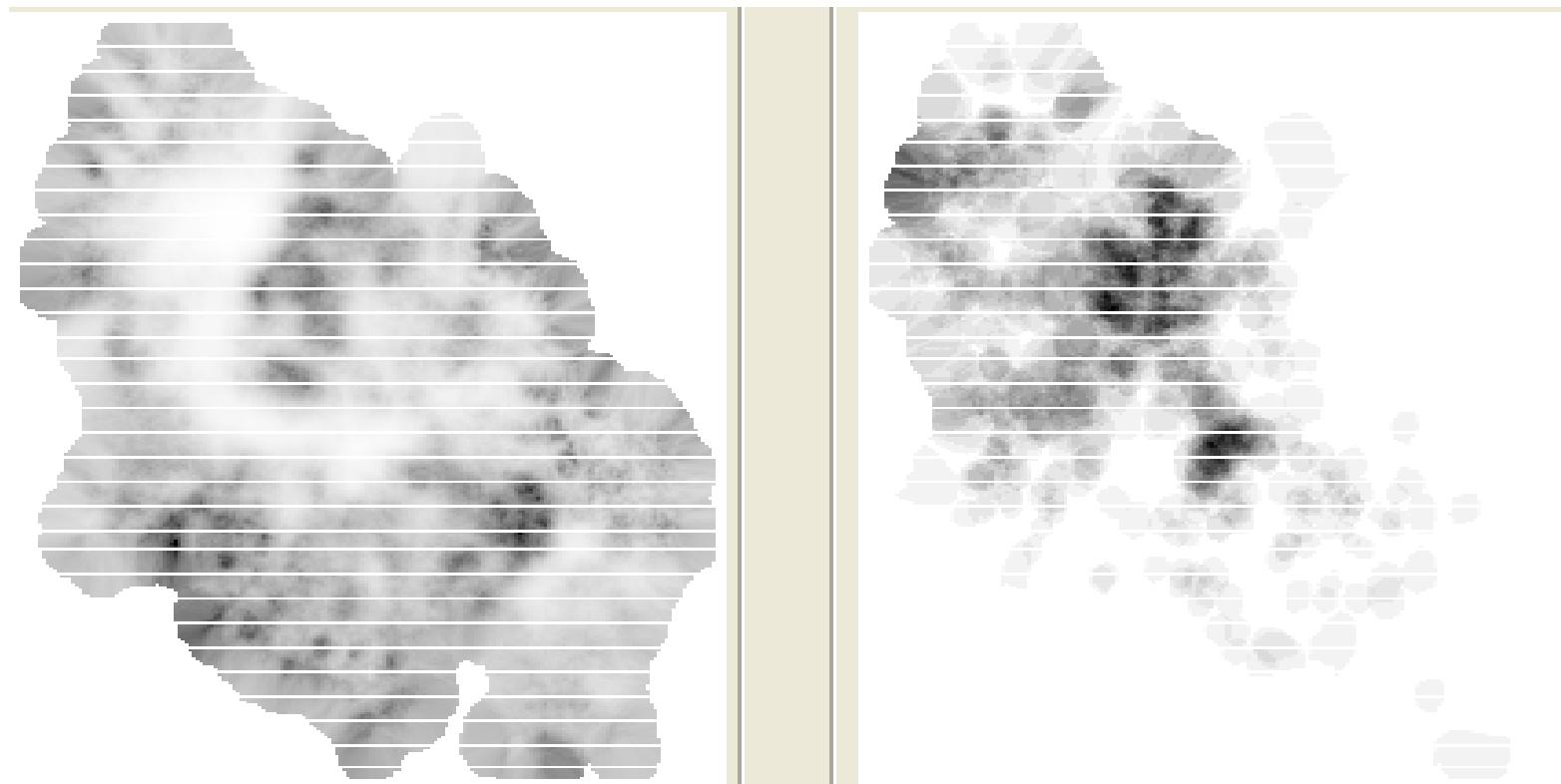
Lokale Beobachtungsintensität vs. Dichte positiver Fälle

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT

FLI

Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Interpretation 4: Sperrgebiete und Beobachtungszonen



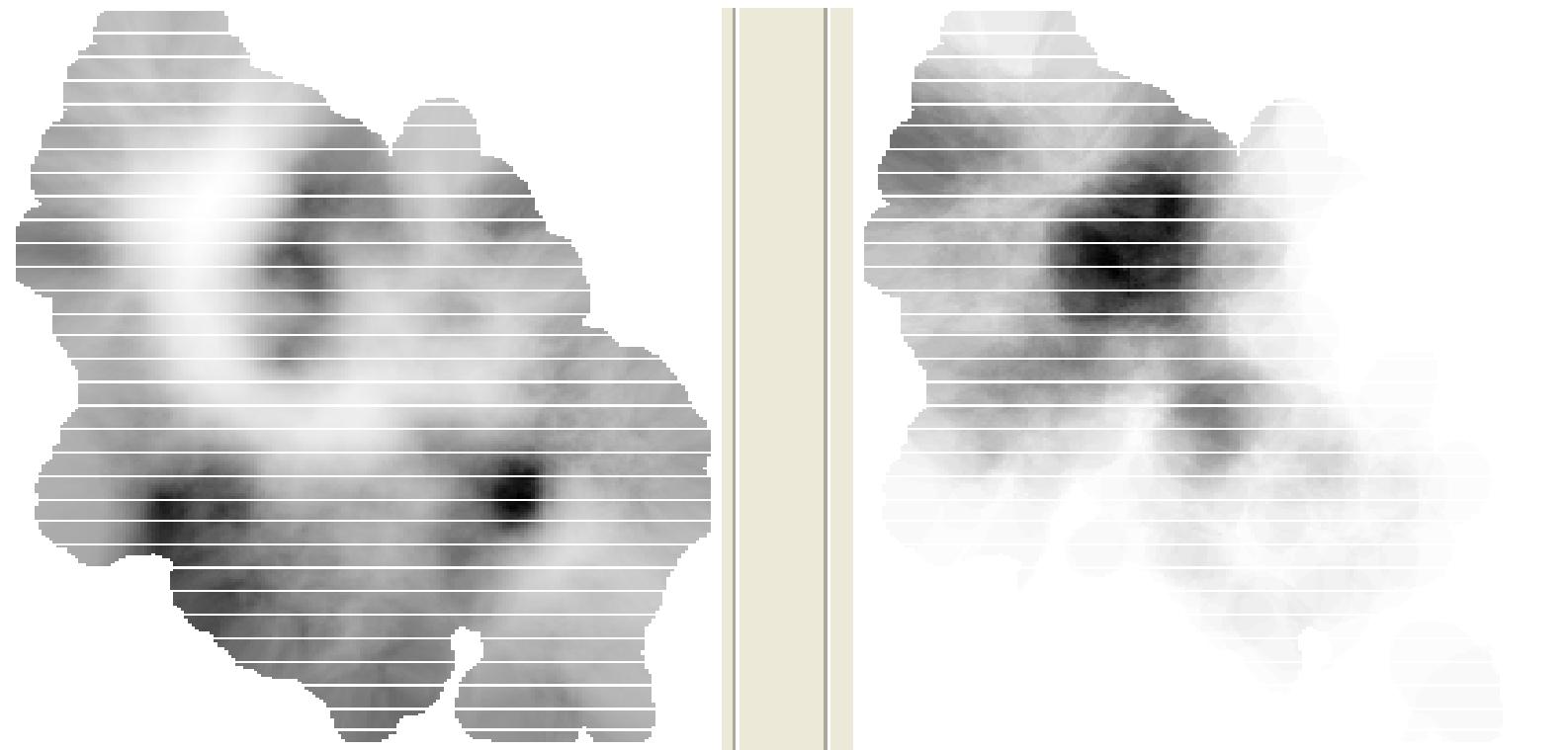
Lokale Beobachtungsintensität vs. lokale Prävalenz

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Interpretation 4: bei stärkerer Glättung



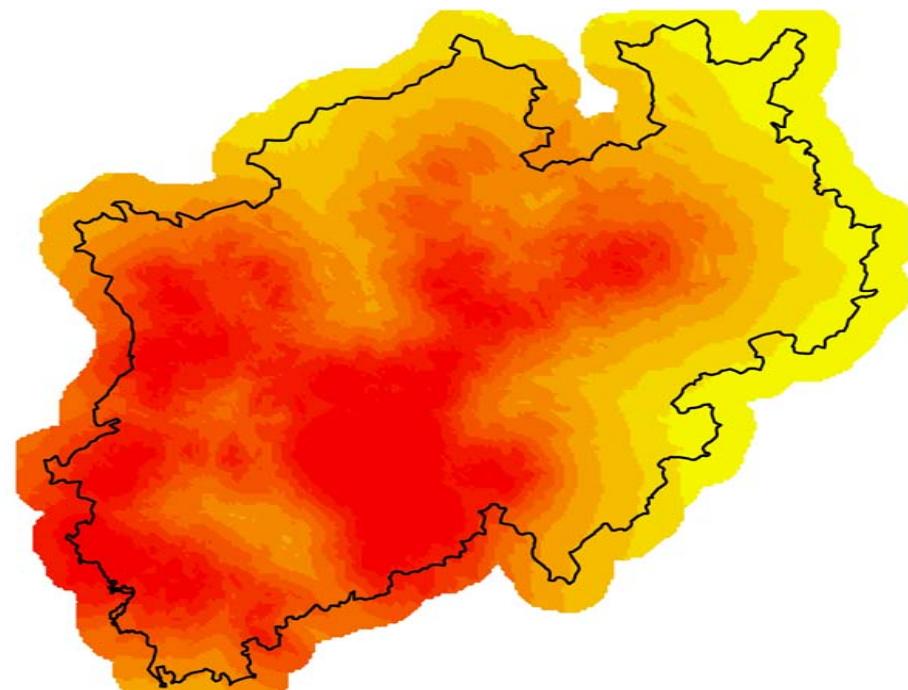
Beobachtungsintensität vs. Prävalenz

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Interpretation 5: Verschnitt mit GIS-Informationen



Bestandsdichte der Wiederkäuer

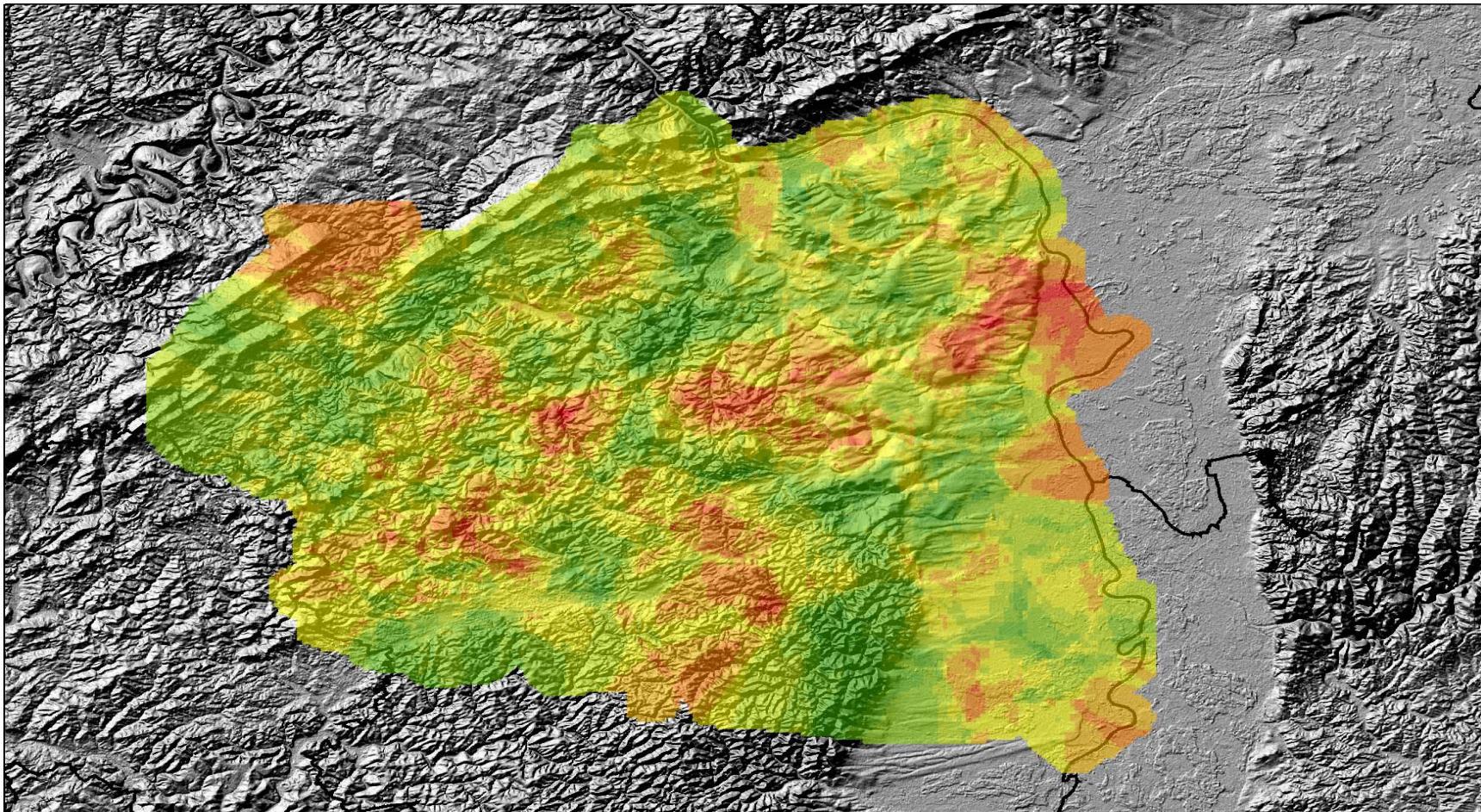
vs. BT-Fälle und Bestandsdichte der Wiederkäuer

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT

FLI

Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Seroprävalenzen Tollwut bzgl. gegebener Untersuchungsfläche



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Ausblick

- Konstruktion geeigneter Tests zur objektiven Beurteilung von Unterschieden verschiedener Dichten

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health

Danksagung

- Wir bedanken uns bei
 - den Bundesländern für die Kooperation bei der Bereitstellung der Urdaten
 - Dr. Staubach für die Anfertigung der GIS-Karten zur Blauzungenkrankheit
 - den Frauen Kämer, Kliemt und Teske für die technische Unterstützung bei der Arbeit mit dem GIS-System

FRIEDRICH-LOEFFLER-INSTITUT



Bundesforschungsinstitut für Tiergesundheit
Federal Research Institute for Animal Health