

RICHTER, Christel

**Gedanken zur Problematik „Blocks im Feldversuchswesen – fix oder zufällig“****1 Das klassische lineare Modell im einfaktoriellen Blockversuch**

Die Bearbeitung einer wissenschaftlichen Fragestellung, die mittels eines Versuchs beantwortet werden soll, beginnt / sollte damit beginnen, dass der Versuchsansteller den vorgesehenen Aussagebereich seiner Forschungsergebnisse festlegt. Dementsprechend muss der Versuch geplant, durchgeführt und ausgewertet werden. Ist es ein Versuch, der in randomisierter Blockanlage angelegt werden soll, so ist zu entscheiden, ob die Blocks als fixe oder zufällige Komponenten (Effekte) zu betrachten sind. Diese Entscheidung hat im klassischen linearen Modell einen engen Bezug zum Aussagebereich. Beispielhaft ist im Folgenden ein Versuch mit einem fixen Prüffaktor dargestellt. Unter der Annahme, dass keine Wechselwirkungen zwischen Blocks und Prüfgliedern existieren, sind die hier alternativ diskutierten linearen Modelle in (1) und (2) formuliert. Zufallsvariablen sind durch Unterstreichungen gekennzeichnet.

Für **fixe Blocks**  $\eta_j$  lautet das Modell:

$$\underline{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \underline{\eta}_j + \underline{\varepsilon}_{ij} \quad (1)$$

mit  $i = 1, \dots, a$ ; a Prüfglieder  
 $j = 1, \dots, bl$ ; bl Blocks.

Die Voraussetzungen für das Modell (1) sind bezüglich der Einzelfehler

$$E(\underline{\varepsilon}_{ij}) = 0 \text{ und } \text{Var}(\underline{\varepsilon}_{ij}) = \sigma^2 \text{ für jedes } i \text{ und } j$$

sowie  $\text{Cov}(\underline{\varepsilon}_{ij}, \underline{\varepsilon}_{i'j'}) = 0$  für  $i \neq i'$ ,  $j$  und  $j'$  beliebig.

Folglich sind Erwartungswert und Varianz der Beobachtungsdaten

$$E(\underline{y}_{ij}) = \mu + \alpha_i + \underline{\eta}_j \text{ und } \text{Var}(\underline{y}_{ij}) = \text{Var}(\underline{\varepsilon}_{ij}) = \sigma^2 \text{ für jedes } i \text{ und } j,$$

sowie  $\text{Cov}(\underline{y}_{ij}, \underline{y}_{i'j'}) = 0$  für  $i \neq i'$ ,  $j$  und  $j'$  beliebig.

Das Modell mit **zufälligen Blocks**  $\underline{\eta}_j$  lautet:

$$\underline{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \underline{\eta}_j + \underline{\varepsilon}_{ij} \quad (2)$$

mit  $i$  und  $j$  wie in (1).

Das Modell (2) hat bezüglich der Einzelfehler dieselben Voraussetzungen wie das Modell (1) mit fixen Blocks. Zusätzlich gilt für die Blocks

$$E(\underline{\eta}_j) = 0, \text{ Var}(\underline{\eta}_j) = \sigma_B^2 \text{ für jedes } j \text{ und}$$

$\text{Cov}(\underline{\eta}_j, \underline{\eta}_{j'}) = 0$  für  $j \neq j'$  sowie  $\text{Cov}(\underline{\varepsilon}_{ij}, \underline{\eta}_{j'}) = 0$  für jedes  $i$  und  $j, j'$  beliebig.

Das bedeutet für den Erwartungswert und die Varianz der Beobachtungsdaten, dass

$$E(\underline{y}_{ij}) = \mu + \alpha_i \text{ und } \text{Var}(\underline{y}_{ij}) = \text{Var}(\underline{\eta}_j + \underline{\varepsilon}_{ij}) = \sigma_B^2 + \sigma^2 \text{ für jedes } i \text{ und } j,$$

$$\text{sowie } \text{Cov}(\underline{y}_{ij}, \underline{y}_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_B^2 & i \neq i', j = j' \\ 0 & j \neq j' \end{cases}.$$

Für alle Zufallskomponenten wird Normalverteilung mit den angegebenen Parametern unterstellt.

Versuche mit vollständigen Blocks werden in Feldversuchen in der Regel so konstruiert, dass jedes Prüfglied genau einmal je Block auftritt, d.h. jede Kombination (ij) existiert einmal. Bei Anlagen mit unvollständigen Blocks tritt nicht jede Kombination (ij) auf.

Ergänzend sei erwähnt, dass bei unvollständigen Blockanlagen, bei denen eine Teilmenge der unvollständigen Blocks zu vollständigen Gruppen zusammengefasst werden können ( $\alpha$ -zerlegbar sind), in (1) bzw. (2) die Effekte der unvollständigen Blocks in Gruppeneffekte und Effekte der unvollständigen Blocks innerhalb der Gruppen zerlegt werden können. Das gleiche kann bei vollständigen Blockanlagen zu berücksichtigen sein, wenn der Versuch als Streuversuch angelegt wird und an den mehreren Flächen des Versuchs mehrere vollständige Blocks liegen.

Diese Situation soll aber im Folgenden unberücksichtigt bleiben.

Die folgenden Betrachtungen befassen sich vornehmlich mit dem Problem des mit dem Modell (1) und (2) zusammenhängenden Aussagebereichs und nicht mit den daraus resultierenden Konsequenzen bei der Auswertung.

## **2 Modellwahl im klassischen linearen Modell und Repräsentativität**

Die Wahl der Modelleigenschaft, ob ein Faktor – hier der Blockfaktor - fix oder zufällig ist, kann nicht willkürlich festgelegt werden.

(1) geht von bestimmten vorgegebenen Blocks aus, (2) erfordert die zufällige Auswahl aus der Menge aller möglichen Blocks, die eine definierte Grundgesamtheit (im Feldversuch i.a. bestimmte natürliche Standortbedingungen in Einheit mit weiteren Konstantfaktoren, wie Vorfrucht, Bodenbearbeitung ...) repräsentieren. Der Festlegung des Auswahlprinzips entspricht eine Fixierung des Aussagebereichs. Die übliche Betrachtungsweise und daraus resultierende Auswertung ist, dass es sich um eine unendliche Grundgesamtheit handelt.

Die Anwendung der Methoden der Schließenden Statistik setzt voraus, dass die Grundgesamtheiten, auf die von den Stichproben verallgemeinert werden soll, klar umrissen sind und aus diesen die Stichproben zufällig gezogen werden. Nur dann sind die aus den Versuchsergebnissen berechneten Maßzahlen als Schätzungen für die entsprechenden Parameter der Grundgesamtheiten zu interpretieren und können ihnen bestimmte Eigenschaften zugeschrieben werden.

Versuchsansteller formulieren häufig den Anspruch, dass ein Versuch für einen Standort repräsentativ ist, und interpretieren deshalb die Blocks als zufällige Stichprobe aus der Grundgesamtheit „Standort“.

Diesem formulierten Anspruch steht häufig das konkrete Vorgehen bei der Anlage eines Versuches gegenüber. I.d.R. besteht keine Möglichkeit, aus der Menge aller denkbaren Blocks des Versuchsstandortes zufällig auszuwählen, da auf Grund der definierten Konstantfaktoren des Versuches (die Bestandteil des Aussagebereichs sind) und anderer objektiver Gründe (Platzbedarf) eine ganz bestimmte Fläche für die Anlage des Versuches genutzt werden muss. In der Realität geplanter Feldversuche werden Blocks fast immer als zusammenhängende Flächen ausgewählt. Selten ist zwischen einigen wenigen alternativen Flächen zu wählen, so dass die Blocks als Streuversuch über den Standort verteilt liegen können. Anzunehmen ist, dass der Versuchsansteller eine Fläche nur dann akzeptiert, wenn er der Meinung ist, dass sie für bestimmte Standortbedingungen repräsentativ ist. Das ist aber letztlich eine subjektive Entscheidung. Hinzu kommt, was in diesem Zusammenhang als „repräsentativ“ bezeichnet werden würde. Im Allgemeinen zielt es auf das durchschnittliche Verhalten ab, die Varianz zwischen den Blocks wird dabei in die Betrachtung kaum einfließen können.

Wird auf Grund vorangegangener Überlegungen eine konkrete Versuchsfläche ausgewählt und werden dort die potentiellen Blocks entsprechend der Homogenitätsforderung gebildet, so gibt es auch auf dieser konkreten Fläche unendlich viele Möglichkeiten Blocks zu bilden. Wo die Blocks konkret zu liegen kommen, ist mehr oder minder zufällig, sie könnten auch um einige (wenige) Meter daneben liegen. Die Grundgesamtheit ist in dem Falle die Versuchsfläche am Standort mit seinen standortbezogenen und versuchsflächenspezifischen Charakteristika. Nur in dem Fall, wo ganz konkrete Stellen auf der Versuchsfläche ausgewählt werden und eine Aussage für diese Stellen von Interesse ist (ein Fall, der kaum eintreten wird), reduziert sich der Aussagebereich auf die konkreten Blocks.

Damit entsteht eine Dreistufigkeit des Aussagebereichs eines Einzelversuchs: Standort → Versuchsfläche → konkrete Blocks.

Diese Dreistufigkeit des Aussagebereichs bedeutet meiner Meinung nach nicht so sehr eine Einschränkung der Interpretation der Versuchsergebnisse gegenüber dem bisherigen Vorgehen, sondern eher eine größere Exaktheit in der Formulierung. Dass man eigentlich - auch schon jetzt - meist die ausgewählte Versuchsfläche am Standort (und nicht den Standort als solchen) meint, äußert sich darin, dass zur Charakterisierung der Konstantfaktoren eines Versuches sowohl standortspezifische, als auch flächenspezifische Angaben (z.B. bodenphysikalische und -chemische Merkmale) herangezogen werden.

Generell hat die Betrachtung auf der Basis des linearen Modells den Nachteil, dass die Voraussetzungen betreffs der Zufälligkeit von Effekten, also hier: Annahme von (1) oder (2), nur verbal formuliert werden. Demgegenüber eröffnen Randomisationsmodelle die Möglichkeit, die Beziehungen zwischen Stichprobe und Grundgesamtheit genauer abzubilden. Dieses soll im Folgenden betrachtet werden.

### 3 Das Randomisationsmodell

Der Grundgedanke für nachfolgende Darlegungen beruht auf KEMPTHORNE (1952), HINKELMANN u. KEMPTHORNE (1994), MEJZA (1994) und CALIŃSKI u. KAGEYAMA (2003). Die dort teilweise sehr umfangreichen Ableitungen werden hier auf die Ergebnisse zur Modellgleichung und die Varianz-Kovarianz-Struktur bei randomisierter vollständiger oder unvollständiger Blockanlage reduziert.

Generell wird in diesen Modellen bei der Begründung der Zufälligkeit einer Effektgruppe (hier: Resteffekte und Blockeffekte) nicht auf die Hypothese der zufälligen Entnahme aus einer definierten Grundgesamtheit zurückgegriffen, sondern auf eine erfolgte Randomisationsprozedur.

Angenommen, es existiert ein theoretischer Versuchsplan mit  $bl$  Blocks und  $k$  Teilstücken auf dem Papier. Im vollständigen Blockversuch ist  $k = a$ . Auf dem Versuchsfeld liegen  $B \geq bl$  Blocks mit je  $K \geq k$  Teilstücken vor.

Die zwei zu betrachtenden Randomisationsschritte sind:

- (a) Die Zuordnung der Blocks des theoretischen Plans zu den Feldblocks erfolgt zufällig.
- (b) Für jeden Block getrennt werden die Parzellen der Blocks des theoretischen Plans denen der Feldblocks zufällig zugeordnet (und damit die Prüfglieder den Parzellen innerhalb der Feldblocks).

#### Fall 1:

Ist  $B = bl$  und wird nur der Randomisationsschritt (b) berücksichtigt, so erhält man bei zusätzlichen Additivitätsannahmen folgendes Modell für den zufälligen Beobachtungswert  $y_{jl(i)}$  des  $i$ -ten Prüfglieds im  $j$ -ten Block auf der  $l$ -ten Parzelle:

$$y_{jl(i)} = \mu + \eta_j + \alpha_{jl(i)} + \pi_{jl} + \epsilon_{jl} \quad (3)$$

mit

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, a; a \text{ Prüfglieder.} \\ j &= 1, \dots, bl; bl \text{ Blocks} \\ l &= 1, \dots, k; k \text{ Teilstücke je Block} \end{aligned}$$

Die Terme des Modells (3) sind:

$\mu$	allgemeines Mittel
$\eta_j$	fester Effekt des $j$ -ten Blocks
$\alpha_{jl(i)}$	fester Effekt der $i$ -ten Behandlung auf der $l$ -ten Parzelle im $j$ -ten Block
$\pi_{jl}$	zufälliger Parzellenfehler, $\text{Var}(\pi_{jl}) = \sigma_\pi^2$
$\epsilon_{jl}$	zufälliger technischer Fehler, $\text{Var}(\epsilon_{jl}) = \sigma_\epsilon^2$

Sei  $m_{jt}$  der sogenannte „Nullwert“ (Blindversuchswert) auf der  $t$ -ten Parzelle im  $j$ -ten Feldblock. Der feste Effekt des  $j$ -ten Blocks in (3) ist durch  $\eta_j = \bar{m}_j - \bar{m}_\cdot$  definiert und der zufällige Parzellenfehler durch

$$\pi_{jl} = \sum_{t=1}^K \delta_{lt}^j (m_{jt} - \bar{m}_j). \text{ Dabei ist } \delta_{lt}^j = 1, \text{ wenn nach der Randomisation im } j\text{-ten Feldblock der } l\text{-ten}$$

Parzelle die  $t$ -te Parzelle des theoretischen Plans zugeordnet wird, ansonsten ist  $\delta_{lt}^j = 0$ . Damit ist

$$E(\pi_{jl}) = 0 \text{ und unter Annahme der Varianzhomogenität}$$

$$\text{Var}(\pi_{jl}) = \sigma_\pi^2 = \frac{1}{bl} \sum_{w=1}^{bl} \sigma_{\pi w}^2 = \frac{1}{bl \cdot K} \sum_{w=1}^{bl} \sum_{t=1}^K (m_{wt} - \bar{m}_w)^2 \text{ und } \sigma_\pi^2 \text{ die Varianz der Grundgesamtheit der}$$

Parzellen innerhalb der Blocks.

Daraus abgeleitet ist:

$$\text{Cov}(y_{j|l(i)}, y_{j'|l'(i)}) = \begin{cases} \sigma_\pi^2 + \sigma_e^2 & j = j', l = l' \\ \frac{-1}{(K-1)} \sigma_\pi^2 & j = j', l \neq l' \\ 0 & j \neq j' \end{cases} .$$

Im Feldversuch können - im Gegensatz zu technischen Versuchen - technischer und Parzellenfehler i.d.R. nicht voneinander getrennt werden. Auf Grund dessen könnte hier auch die Erwähnung von  $\sigma_e^2$  unterbleiben. Es erfolgte nur der Vollständigkeit halber in Anlehnung an die oben erwähnten Literaturangaben.

Es sei betont, dass der einzige Zufallsprozess, der bisher in die Modellbeschreibung einfließt, durch die Randomisation bedingt ist und über die diskrete Zufallsvariable  $\delta_{lt}^j$  beschrieben wird. Für die Zufälligkeit bestimmter Effekte wird nicht die Vorstellung einer unendlich großen Grundgesamtheit bemüht; es kann sogar sein, dass  $K = k$  ist. Zu testende Problemstellungen müssten in diesem Modell mittels Randomisationstests behandelt werden. KEMPTHORNE (1952) und HINKELMANN u. KEMPTHORNE (1994) untersuchten für den Globaltest der Prüfgliederungswerte das Verhältnis der kritischen Werte der F-Verteilung und des entsprechenden Randomisationstests. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass in den untersuchten Beispielen die Randomisationsverteilung durch die F-Verteilung relativ gut approximiert werden kann.

Für  $K \rightarrow \infty$  ergibt sich für (3) die Kovarianzstruktur des Modells (1) mit fixen Blocks. Das bedeutet, zur Kovarianzstruktur von Modell (1) gelangt man im Randomisationsmodell bei (b) nur dann, wenn davon ausgegangen wird, dass die im Versuch genutzten  $k$  Parzellen eine zufällige Stichprobe aus der Menge aller möglichen  $K$ , also nunmehr unendlich vielen, Parzellen der definierten Blocks sind. Das ist eine Voraussetzung, die auch in (1) enthalten ist, jedoch oft nicht explizit genannt wird. Die genutzten Versuchseinheiten (Parzellen mit ihrem Pflanzenbestand) sollen auch bei (1) eine Zufallsstichprobe aus der Menge aller möglichen Versuchseinheiten der definierten, unendlich großen Grundgesamtheit sein.

## Fall 2:

Werden die Randomisationsschritte (a) und (b) berücksichtigt, so erhält man - wieder bei zusätzlichen Additivitätsannahmen - für den zufälligen Beobachtungswert  $y_{j|l(i)}$  des  $i$ -ten Prüfglieds im  $j$ -ten Block auf der  $l$ -ten Parzelle:

$$y_{j|l(i)} = \mu + \eta_j + \alpha_{j|l(i)} + \pi_{jl} + \epsilon_{jl} \quad (4)$$

Für die Beschreibung der zwei Randomisationsprozeduren sind hier 2 zufällige, voneinander unabhängige Indikatorvariablen notwendig.

Für die Varianz-Kovarianz-Struktur ergibt sich:

$$\text{mit} \quad \text{Cov}(y_{-j|l(i)}, y_{-j'l'(i)}) = \begin{cases} \sigma_b^2 + \sigma_\pi^2 + \sigma_e^2 & j = j', l = l' \\ \sigma_b^2 + \frac{-1}{(K-1)} \sigma_\pi^2 & j = j', l \neq l' \\ \frac{-1}{(B-1)} \sigma_b^2 & j \neq j' \end{cases}$$

$$\text{wobei} \quad \text{Var}(\underline{\pi}_{jl}) = \sigma_\pi^2 = \frac{1}{B} \sum_{w=1}^B \sigma_{\pi w}^2 = \frac{1}{B \cdot K} \sum_{w=1}^B \sum_{t=1}^K (m_{wt} - \bar{m}_w.)^2$$

$$\text{und} \quad \text{Var}(\underline{\eta}_j) = \sigma_b^2 = \frac{1}{B} \sum_{w=1}^B (\bar{m}_w. - \bar{m}..) ^2$$

Für  $K \rightarrow \infty$  und  $B \rightarrow \infty$  erhält man die Kovarianzstruktur des Modells (2) mit zufälligen Blocks. Das bedeutet, zur Kovarianzstruktur des Modells (2) gelangt man im Randomisationsmodell nur dann, wenn davon ausgegangen wird, dass die im Versuch genutzten Parzellen eine zufällige Stichprobe aus der Menge aller (unendlich vielen) Parzellen der denkbaren Blocks und die Blocks eine zufällige Stichprobe aus der Menge aller (unendlich vielen) Blocks der definierten Grundgesamtheit sind. Das sind beides Annahmen, die implizit bei (2) vorausgesetzt werden.

Die Rechtfertigung dieser Annahme bezieht sich im Feldversuchswesen darauf, dass es auch bei einer gegebenen Versuchsfläche unendlich viele Möglichkeiten gibt, Teilstücke und Blocks zu konstruieren. Die Grundgesamtheit ist dann die konkrete Versuchsfläche. Nur wenn die B Blocks den ganzen Standort ausfüllen würden, wäre der Standort die Grundgesamtheit. Der oben für (3) angegebene Grenzfall  $K \rightarrow \infty$  geht davon aus, dass es in den konkreten  $B = bl$  Blocks unendlich viele Möglichkeiten gibt, Parzellen zu bilden.

Häufig wird argumentiert, dass in vollständigen Blockversuchen der Randomisationsschritt (a) ohne Bedeutung ist, bei unvollständigen Blocks aber sehr wohl, woraus hierbei die mögliche kombinierte Intra-Inter-Block-Analyse abgeleitet wird. Formal kann die Randomisation (a) aber natürlich auch beim vollständigen Blockversuch durchgeführt werden, nur dass man deren Wirkung nicht unmittelbar wahrnimmt. Gibt es Personal-, zeitliche und/oder andere organisationstechnische Effekte, die blockweise randomisiert zugeordnet sind, dann ist in jedem Fall der Randomisationsschritt (a) auch in vollständigen Blocks erkennbar und durchzuführen (vgl. auch CALINSKI u. KAGEYAMA (2003, S.20)).

#### 4 Zusammenfassung

Die Beziehungen zwischen den Modellen (1) und (3), sowie (2) und (4) machen deutlich, dass der Aussagebereich in jedem Fall nur durch das Auswahlprinzip bestimmt ist.

Im Modell (1) und (2) wird die Zufälligkeit bestimmter Effekte durch die zufällige Auswahl aus den entsprechenden unendlich großen Grundgesamtheiten begründet. In Modell (3) und (4) bestimmen die Randomisationsschritte über die Zufälligkeit der enthaltenen Effekte. Der Aussagebereich wird durch die K Versuchseinheiten bzw. B Blocks bestimmt.

Folglich ist die Vorstellung, die gerechtfertigte Annahme zufälliger Blockeffekte (egal, ob klassisches lineares Modell oder Randomisationsmodell) bedeute automatisch die Verallgemeinerung auf den Standort, falsch. Es bedeutet zunächst nur, dass auf die Versuchsfläche am Standort, aus der die Stichprobe zufällig gezogen wird ((1) und (2)) bzw. auf der die B Blocks mit K Parzellen denkbar wären - von denen bl Blocks mit je k Parzellen in den Versuch kamen - ((3) und (4)), verallgemeinert werden darf. Der gesamte Standort wäre auch im Randomisationsmodell nur dann der entsprechende

Aussagebereich, wenn die  $K$  Parzellen und  $B$  Blocks über den gesamten Standort verteilt denkbar sind und dementsprechend die Randomisation erfolgt. Bei Durchführung der o.g. zwei Randomisationsschritte können selbst bei  $B = b$  und  $K = k$  die Rest- und Blockeffekte als zufällig betrachtet werden. Erst der Übergang  $K \rightarrow \infty$  und ggf.  $B \rightarrow \infty$  lässt eine umfassendere Analogie zwischen der „Philosophie“ des klassischen linearen Modells und des Randomisationsmodells zu.

Auf Grund der obigen Darlegungen gehe ich davon aus, dass in den meisten Situationen der Aussagebereich eines Einzelversuches die ausgewählte Versuchsfläche am Standort ist und dafür die Blockeffekte als zufällig betrachtet werden können. Eine Erweiterung des Aussagebereichs über die Grundgesamtheiten hinaus, aus denen die Stichproben entnommen wurden, ist eine Extrapolation, die nicht ohne Unterstellung weiterer Annahmen möglich ist.

Ob dann bei der Auswertung des Versuchs (Schätzen der Prüfgliederwartungswerte und deren Differenzen) mit Block zufällig gearbeitet werden sollte, oder doch auf Modell fix reduziert wird (d.h. man verzichtet auf einen Teil der Information), ergibt sich dann in erster Linie aus den statistischen Eigenschaften der Schätzungen und nicht so sehr des Aussagebereichs.

## 5 LITERATUR

CALIŃSKI, T. and KAGEYAMA, S. (2003): Block Designs: A Randomization Approach, Vol. I. Springer.

HINKELMANN, K. and KEMPTHORNE, O. (1994): Design and Analysis of Experiments. Vol. I, Wiley.

KEMPTHORNE, O. (1952): The Design and Analysis of Experiments. Wiley.

MEJZA, S. (1994): On Modelling of Experiments in Natural Sciences.

Listy Biometryczne – Biometrical Letters. Vol.31, No. 2, 79 -100.