Modellierung von Baumeffekten mit Methoden der räumlichen Statistik

Konrad Wälder, Institut für Stochastik, TU Bergakademie Freiberg

Hannover, 24.11.2005

• *Motivation*

Einzelbaumeffekte wie Streu- und Feinwurzelausbreitung sind von großer Bedeutung für die Walddynamik, insbesondere wenn Wechselwirkungen/Interaktionen zwischen einzelnen Bäumen berücksichtigt werden können.

Parameter, die die Nachbarschaft zwischen Bäumen beschreiben, liefern ebenfalls Informationen über die Entstehung von Wäldern und über Konkurrenzsituationen zwischen einzelnen Bäumen und Baumarten.

• *Modelle und Methoden*

- *Poisson-Cluster-Prozesse*

Die Bäume, bzw. die Baumpositionen bilden die Clusterzentren. Die Punktanzahl im Cluster folgt einer inhomogenen Poisson-Verteilung

- *Markierte Punktprozesse*

Die Bäume werden mit geeigneten Marken versehen. Diese Marken beziehen sich auf bestimmte Attribute eines einzelnen Baumes oder beschreiben bestimmte Nachbarschafts- und Konkurrenzsituationen

• *Poisson Cluster Punkt Prozess (1)*

Die Punkte (Früchte) eines Clusters (Baumes) bilden einen inhomogenen Poisson-Prozess mit Intensitätsfunktion $\lambda(x, y)$ für einen Punkt *(x,y)* im Abstand *r* vom Baum.

Aus der Punktprozeßtheorie wissen wir, dass diese Funktion folgendermaßen von der Gesamtanzahl der Punkte *m* im Cluster und der Wahrscheinlichkeitsdichte *p(x,y)* eines einzelnen Punktes abhängt:

$$\lambda(x, y) = mp(x, y)$$

Im Fall der Isotropie vereinfacht sich dies zu

$$\lambda(r) = mp(r)$$

• *Poisson Cluster Punkt Prozess (2)*

Mehrbaumfall

Wir betrachten nun *M* Bäume. Die Früchte werden in *N* Fallen mit Grundfläche *a* an Positionen $s_1,\ldots,s_N$ mit Werten $n(s_1),\ldots,n(s_N)$ gesammelt.

Nun ist ein *Poisson-Cluster-Punktprozess* folgendermaßen gegeben:

• Die *M* Clusterzentren sind durch die Baumpositionen gegeben.

• Die um die Bäume verstreuten „Punkte“ sind die Positionen der Früchte

• *Poisson Cluster Punkt Prozess (3)*

Im allgemeinen hat jeder Baum seine eigene Fruchtanzahl. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Fruchtanzahl eines Baumes von der Fruchtanzahl eines Referenzbaumes und seinem BHD (Brusthöhendurchmesser) abhängt.

Wir bezeichnen mit *m* die Fruchtanzahl des Referenzbaumes mit mittlerem BHD und erhalten dann für Baum *j*

$$m_j = m\left(\frac{dbh_j}{dbh_{mean}}\right)^{\beta}$$

• *Poisson Cluster Punkt Prozess (4)*

Der Erwartungswert in einer Falle der Fläche *a* ist gleich

$$E(n(s)) = am\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{dbh_j}{dbh_{mean}}\right)^{\beta} p(r_j(s)) =: \mu(s)$$

„Fallenintensität“

$r_j(s)$ ist der Abstand zwischen Baum *j* und der Falle an Position s

Die Fruchtanzahl folgt einer Poisson-Verteilung mit

$$P\left(n(s) = k\right) = \frac{\mu(s)^k}{k!}\exp\left(-\mu(s)\right)$$

• *Verteilungsannahmen*

p muss eine Dichtefunktion sein. Wir wissen, dass zwischen *p* und der Wahrscheinlichkeitsdichte *d* des zufälligen Abstandes eines Punktes vom Zentrum folgende Beziehung besteht:

$$d(r) = 2\pi r p(r)$$

Sinnvolle Verteilungen:

lognormal-Verteilung: *d* ist durch die Dichte der lognormal-Vert. gegeben

$$p(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma r^2}\exp\left(-\frac{(\ln(r)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ribbens-Ansatz: p ist durch die folgende Dichte

$$p(r) = \frac{\Theta^{2/\Theta}}{\Gamma(2/\Theta)} r \exp\left(-Dr^{\Theta}\right)$$

gegeben.

Bemerkung: keine Standardverteilung, aber populär in den Forstwissenschaften.

Im Gegensatz zum lognormal-Ansatz ist p hier monoton fallend

• *Modellverallgemeinerungen (1)*

Anisotropie: Die Intensitätsfunktion hängt nicht nur von den Abständen, sondern auch den Richtungen zu den Bäumen ab.

Ansatz:

$$f(\varphi) = \exp\left(k\cos(\varphi - u + \pi)\right)$$

$$r_{\varphi}(s) = r\ f(\varphi)$$

Einzelheiten in

Wagner, S., Wälder, K., Ribbens, E. and Zeibig, A., 2004: Directionality in fruit dispersal models for anemochorous forest trees. Ecological Modelling, 179, 487-498

• *Modellverallgemeinerungen (2)*

Interaktionen zwischen Bäumen:

Die ungewichtete Summe der Einzelbaumbeiträge

$$E(n(s)) = am\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{dbh_j}{dbh_{mean}}\right)^{\beta} p(r_j(s)) = am\sum_{j=1}^{M}\mu_j(s) =: \mu(s)$$

wird durch eine gewichtete Summe

$$am\sum_{j=1}^{M} w_j\mu_j(s) =: \mu(s)$$

ersetzt. Stichwort: *Choquet-Integral*

Näther, W. and Wälder, K., 2003: Experimental design and statistical inference for cluster point processes – with applications to the fruit dispersion of anamochorous forest trees. Biometrical Journal, 45, 1006-1022.

• *Modellanpassung (1)*

Maximum-Likelihood-Methode

$$L = \prod_{i=1}^{N} \frac{\mu(s_i)^{n(s_i)}}{n(s_i)!} \exp\left(-\mu(s_i)\right) \rightarrow \max$$

Meist ist es numerisch einfacher *log(L)* zu maximieren.

Problem: *L* bzw. *log(L)* sind enorm flach; d.h. starke Veränderungen der Modellparameter führen nur zu sehr kleinen Änderungen von *L* bzw. *log(L)*

- ***Modellanpassung (2)***

Ein spezielles Bayessches Verfahren

Importance Sampling mit geeignet gewählter *Importance- Funktion*.

Gesucht sind i.a. Modellparameter Θ. Der beste Schätzer hierfür ist

$$E(\Theta \mid n_1, \ldots, n_M) = \int_{\Theta} \Theta \, p(\Theta \mid n_1, \ldots, n_M) \, d\Theta$$

• *Modellanpassung (3)*

Importance Sampling

$$\int_{\Theta} \Theta\, \pi(\Theta)\, d\Theta = \int_{\Theta} \Theta\, \frac{\pi(\Theta)}{t(\Theta)} t(\Theta)\, d\Theta$$

geschätzt werden durch

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \Theta_i \frac{\pi(\Theta_i)}{t(\Theta_i)}$$

Hier: $$\pi(\Theta) = p(\Theta \mid n_1, \ldots, n_M) \propto L(\Theta)\, p(\Theta)$$

- ***Modellanpassung (4)***

Wahl der Importance-Funktion: multivariate Gleichverteilung.

Die Intervalle für die einzelnen Parameter können aus den Daten bzw. Vorwissen bestimmt werden.

Beispiel: lognormales Modell: Parameter m, μ, σ

mittlerer Abstand einer Frucht vom Baum: $m_D = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$

maximale Ausbreitungsdichte an der Stelle $r_{\max} = \exp(\mu - 2\sigma^2)$

$r_{\max}$ orientiert sich am Kronenrand bzw. Kronenradius

• *Fallstudie Lausnitz*

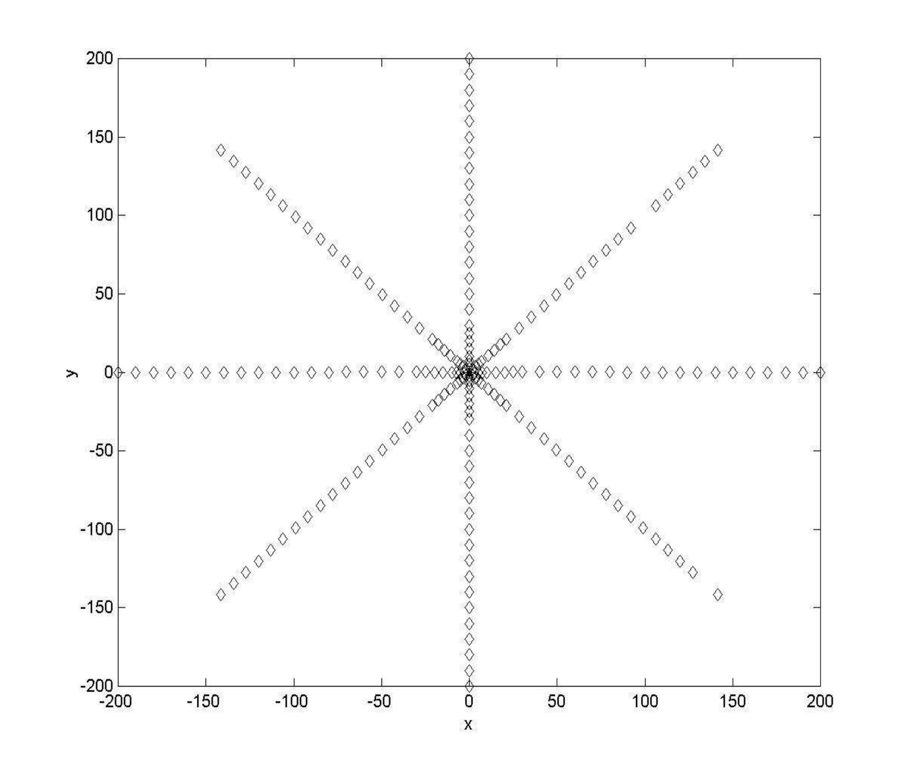
•1 einzelne Birke in der Mitte des Versuchsfeldes

• Kiefern in der Nachbarschaft der Birke

• 197 Fruchtfallen auf konzentrischen Kreisen um die Birke, Fallendurchmesser 0.5 m.

•Die Früchte wurden im Herbst 2002 gesammelt.

- ## *Fallstudie Lausnitz*



• *Resultate*

MLE: $m = 2 \cdot 10^8, \mu = 9.25, \sigma = 2.23$

Erklärte Varianz: 60%, Korrelation 0.8

Maximumsstelle der Dichte *p*: $r_{\max} = 0.22m$

Mittlere Ausbreitung $m_D = 153311m$

Importance Sampling:

$$m = 2.9 \cdot 10^6, \mu = 4.11, \sigma = 1.35$$

Korrelation wiederum 0.8

$$r_{\max} = 1.60, m_D = 152m$$

• Markierte Punktprozesse

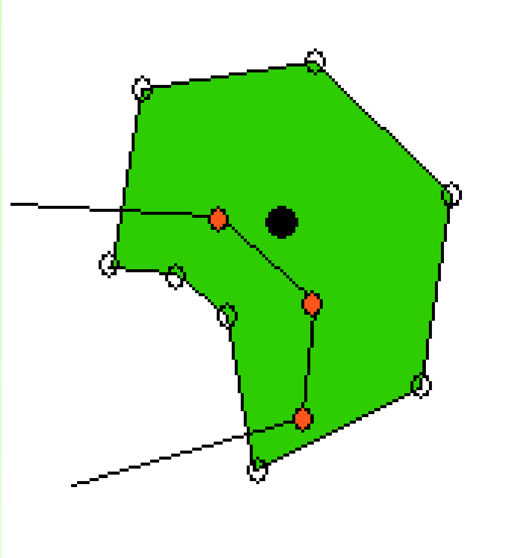
- Die *Punkte* sind die Bäume bzw. die Baumpositionen
- Die *Marken* sind interessante Attribute der Bäume
  - *BHD, Höhe, mittlerer Kronenradius*
  - *Kronenindex:*

  Jede Baumkrone wird mit 8 Polygonpunkte erfasst.

  Für jeden Baum werden die 8 nächsten Kronenpolygonpunkte bestimmt. Gehört ein Punkt zur eigenen Krone, so geht er mit dem Gewicht *1/8* in den Kronenindex ein; ansonsten mit der *0*

- Markierte Punktprozesse

Kronenindex: Index: 5/8



Markenkorrelationsfunktion (Mkf):

Für zwei Bäume im Abstand r werden die Marken multipliziert und hiervon der Erwartungswert bestimmt. Dieser Wert wird mit dem quadrierten Erwartungswert der Marke normiert.

• Fallstudie Solling

154 Buchen und 84 Fichten

o Buche, + Fichte

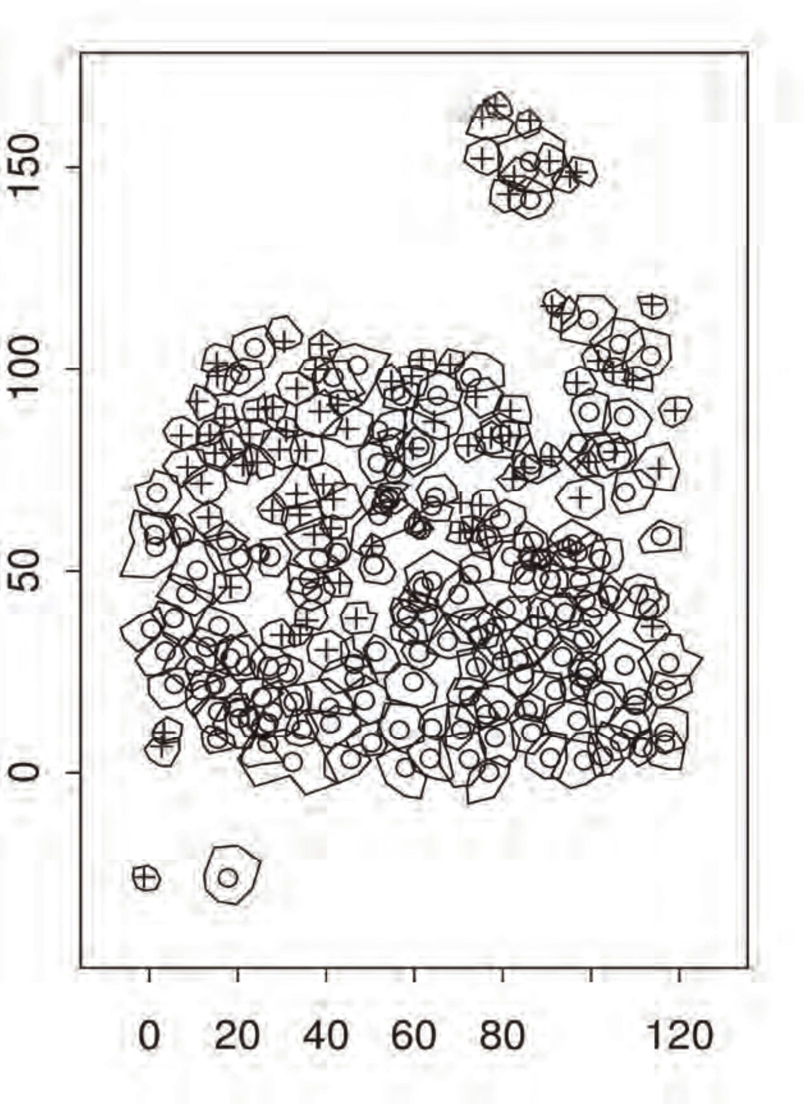
Mkf für BHD, Höhe und mittleren Kronenradius und Kronenindex.

Fallunterscheidung:

• Berücksichtigung aller Bäume

• nur artinterne Nachbarschaften

• nur gemischte Nachbarschaften



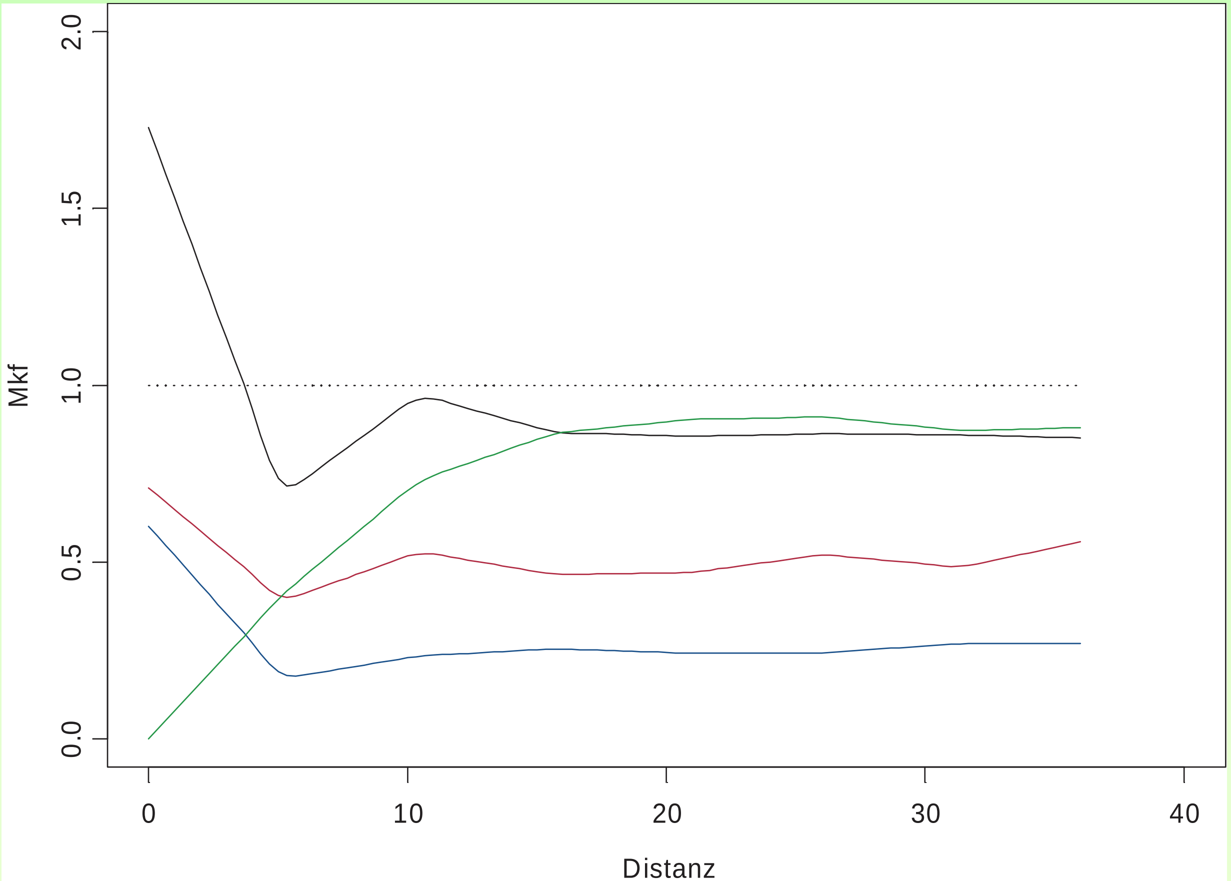
Mkf: Kronenindex

schwarz: alle Bäume

grün: gemischte Nachbarschaften

blau: Buche-Buche

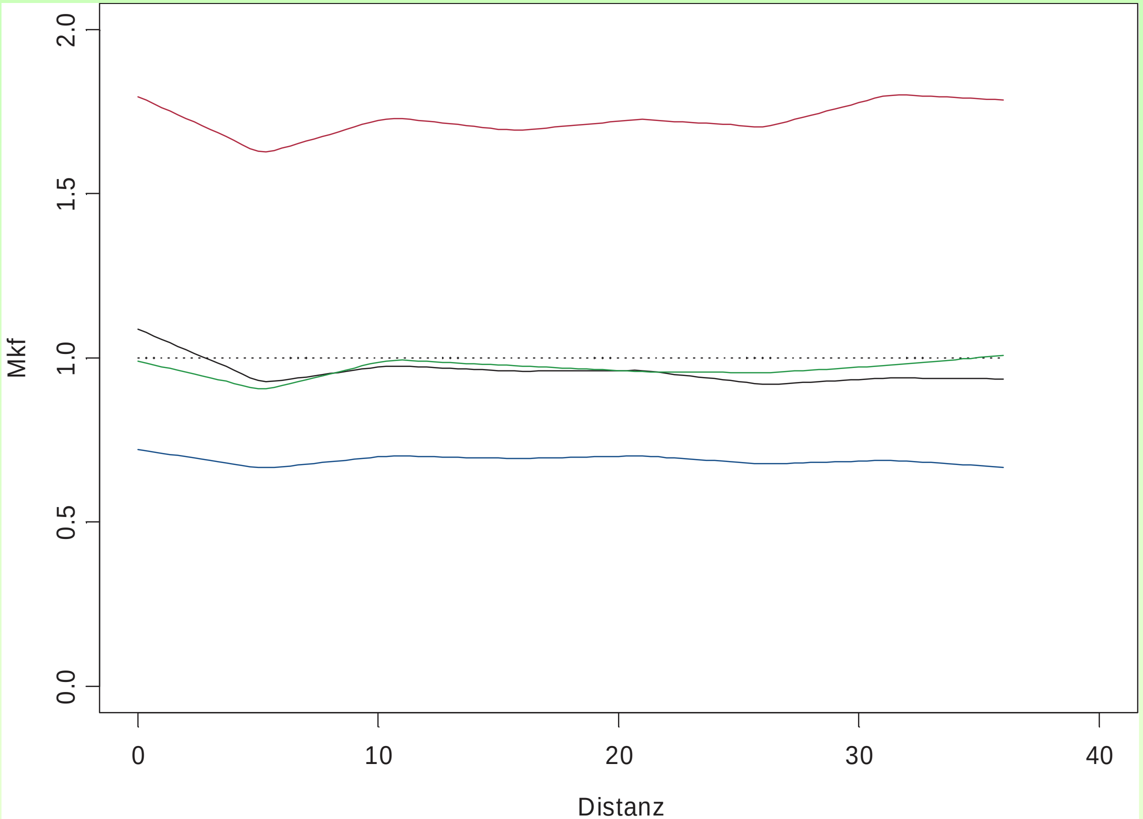
rot: Fichte-Fichte



Bemerkung: relativ häufige Buche-Buche Kronenüberlappungen

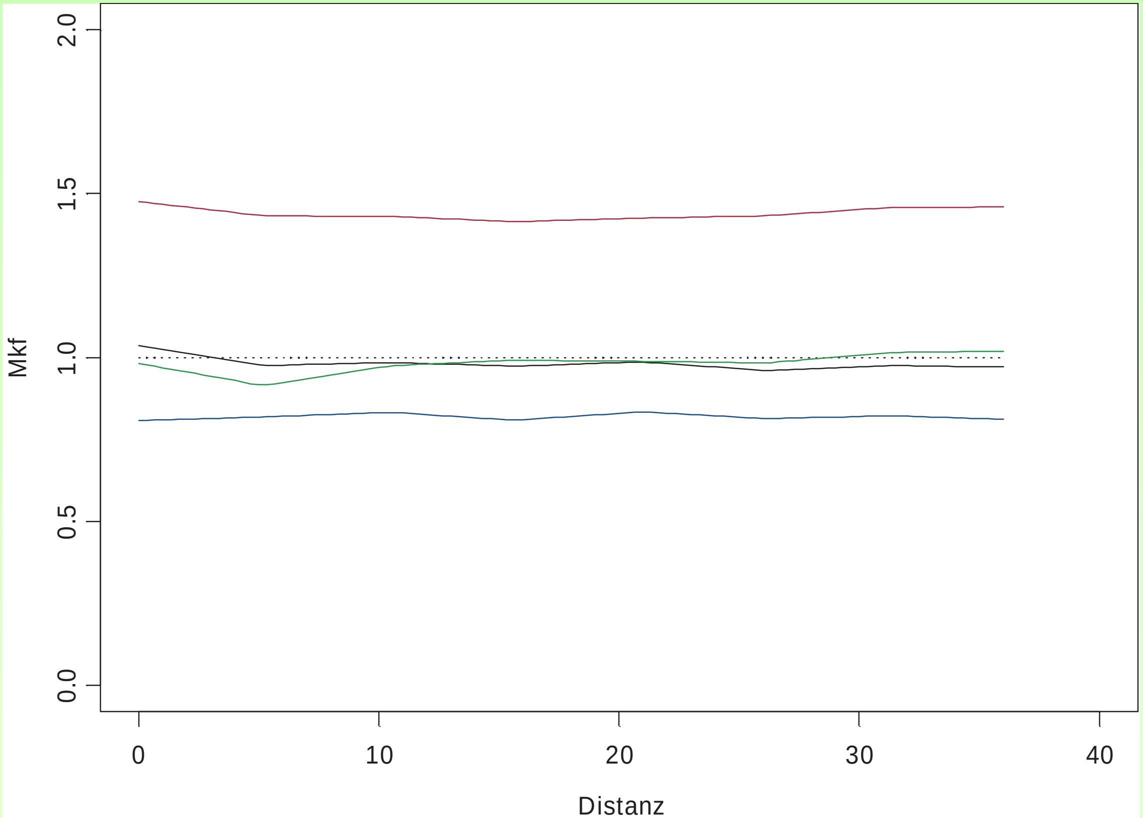
Modellierung von Baumeffekten

Mkf für BHD



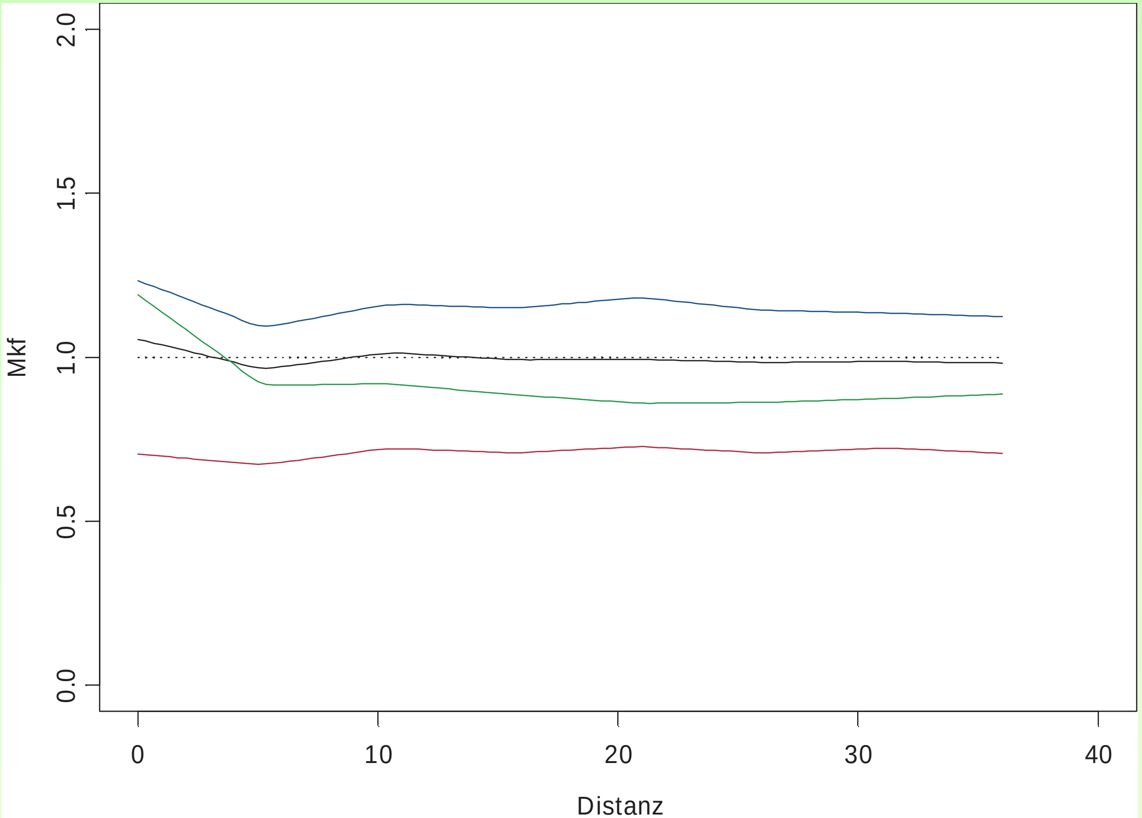
Bemerkung: positive Korrelation bei den Fichten; Verdrängung bei den Buchen; keine Effekte bei Berücksichtigung aller Bäume und gemischten Nachbarschaften

Mkf für Höhe



Bemerkung: Interaktion wie bei BHD

Mkf für
Kronenradius



Bemerkung: Entgegengesetztes Verhalten im Vergleich zu BHD und Höhe; Verdrängung bei den Fichten, Anziehung bei den Buchen

• Fallstudie Solling

Fazit und Interpretation:

Aus dem Gesamtbild aus 4 Markenkorrelationsfunktionen könnte man folgendes schließen:

• Fichten unterstützen sich dahingehend gegenseitig, dass große Fichten nebeneinander stehen, ohne sich zu stören und ohne häufige Kronenüberlappungen

• große Buchen stoßen sich gegenseitig ab; das zeigen insbesondere die Mkf´en für BHD und Höhe

• es gibt aber häufige Kronenüberlappungen, d.h. bei den Buchen stehen häufig kleinere Bäume unter größeren

Vielen Dank Für Ihre Aufmerksamkeit